Faltung (Convolution). Seien $p, q \in [1, \infty]$ und $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R})$. Dann definiert man die Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f(t) dt.$$

Korollar 4.3.4 besagt, dass $f * g$ fast überall wohldefiniert ist, $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ für $r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, und

$$\|f * g\|_r \ \leq \ \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Proposition 4.3.6. ist ein Indiz die Nützlichkeit von Konvolutionen als "Glattmacher": Falls $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$. D.h. obwohl g nicht unbedingt stetig ist, wird $f * g$ stetig durch f. Durch geschickte Wahl von Funktionen $f_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$ erreicht man $f_n * g \to g$ wenn $n \to \infty$. Dies liefert dann eine Approximation von g durch stetige Funktionen.
In der ersten Aufgabe betrachten wir den Fall $r = \infty$.

Aufgabe 12.1.
Seien $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R})$, für p und q in $(1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeige, dass die Faltung $f * g$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Zeige weiter, dass $f * g$ im Unendlichen gegen 0 geht, d.h. dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\sup_{|x| > \delta} \left| (f * g)(x) \right| \ < \ \varepsilon \, .$$

Hinweis: Approximiere f und g mit Funktionen in C_0^0.

Hints:

(i) Da der Raum $C_0^0(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Support sowohl in $L^p(\mathbb{R})$ als auch in $L^q(\mathbb{R})$ dicht liegt, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\psi_\varepsilon \in C_0^0(\mathbb{R})$ und $\phi_\varepsilon \in C_0^0(\mathbb{R})$ sodass

$$\|f - \psi_\varepsilon\|_p \ < \ \varepsilon \qquad \textit{and} \qquad \|g - \phi_\varepsilon\|_q \ < \ \varepsilon \, .$$

(ii) Sei $\theta \in C_0^0(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion mit kompaktem Support. Zeige:

$$\lim_{k \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \theta(y+k) - \theta(y) \right| dy \ = \ 0 \, .$$

(iii) Seien ϕ und ψ in $C_0^0(\mathbb{R})$. Zeige, dass $\psi * \phi \in C_0^0(\mathbb{R})$. Dafür ist (ii) nützlich.

(iv) Wende nun (iii) auf ψ_ε und ϕ_ε an, um die Aufgabe zu lösen. Folgende Identität ist dabei nützlich:

$$f * g \ - \ \psi_\varepsilon * \phi_\varepsilon \ = \ \big(f - \psi_\varepsilon\big) * g \ + \ \psi_\varepsilon * \big(g - \phi_\varepsilon\big) \, .$$

Aufgabe 12.2.
Sei $f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue Mass bezeichnet. Zeige folgende Gleichung mit Hilfe von Fubini's Theorem:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty y^{p-1} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq y\}) dy.$$

Hinweis: $|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} py^{p-1} dy$.

Bemerkung: Vergleiche mit Aufgabe 9.1. Im Gegensatz zu damals können wir nun Fubini direkt anwenden.

Aufgabe 12.3.
Definiere $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} y^{-2}, & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist diese Funktion summierbar bezüglich des Lebesguemasses?

Hint: Das gleiche Theorem wie in 12.2. kann helfen...

Aufgabe 12.4.
Satz von Marcinkiewicz

(a) Sei $F \subset [0,1]$ eine abgeschlossene Menge und $\delta_F(z) = \inf\{|y-z|; y \in F\}$. Zeige mit Fubini, dass

$$\int_0^1 \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}}\, dz < \infty$$

für alle $\lambda > 0$ und fast jedes $x \in F$

(b) Seien $F \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $f \geq 0$ integrierbar auf dem Komplement von F. Zeige: Für jedes $\lambda > 0$ ist die Funktion

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}}\, f(z)\, dz$$

summierbar auf F

Hinweis: Zeige, dass $\delta_F(x) = 0$ äquivalent ist zu $x \in F$, falls F abgeschlossen ist.

Hints:

- *Da $\delta_F(z) = 0$ für $z \in F$, folgt*

$$\int_F \int_0^1 \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}} dz dx = \int_F \int_{[0,1]\setminus F} \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}} dz dx \ .$$

- *Verwende als nächstes Fubini.*
- *Bemerke, dass $|x-z| \geq \delta_F(z) > 0$ für $z \in [0,1] \setminus F$ und alle $x \in F$. Verwende das, um das Doppelintegral von oben abzuschätzen.*
- *Folgere das Resultat (a).*
- *(b) geht analog.*

Minkowski's Ungleichung Die Minkowski Ungleichung ist nichts anderes als die Dreiecksungleichung für die L^p-Norm. Dank ihr ist die L^p-"Norm" wirklich eine Norm.

Aufgabe 12.5.
In dieser Aufgabe beweisen wir eine Integral-Version von Minkowski's Ungleichung, welche diejenige aus der Vorlesung verallgemeinert. Es seinen μ, ν Radon-Masse auf $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^l$ für den Rest der Aufgabe.

(a) Es sei $p \in [1, +\infty]$ gegeben und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zudem sei $f \in L^p(\mathbb{R}^k, \mu)$. Zeige, dass gilt:

$$\sup \Big\{ \int_{\mathbb{R}^k} f \cdot g d\mu \;\Big|\; g \in L^q(\mathbb{R}^k, \mu), \|g\|_{L^q} \leq 1 \Big\} = \|f\|_{L^p}$$

(b) Falls f wie oben zudem nicht-negativ ist, d.h. $f \geq 0$, zeige, dass es reicht, das Supremum über alle $g \geq 0$ wie oben zu nehmen.

(c) Es sei $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ messbar bezüglich $\mu \times \nu$. Ferner sei $p \in [1, +\infty[$. Zeige, dass gilt:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^l} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} |F(x,y)\ | d\mu(x) \Big)^p d\nu(y) \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^l} |F(x,y)|^p d\nu(y) \Big)^{\frac{1}{p}} d\mu(x).$$

Dies ist die Integral-Version der Minkowski Ungleichung.

(d) Formuliere und beweise eine Version der Ungleichung im Fall $p = +\infty$.

(e) Die gleiche Ungleichung gilt, wenn $\mathbb{R}^k$ durch eine endliche Menge mit Zählmass ν ersetzt wird. Nutze die Integral-Version der Minkowski Ungleichung in diesem Fall um die Dreiecksungleichung für die L^p-Norm zu beweisen.

Hints:

(a)Für "$\leq$" benutze Hölder. Für "$\geq$" wähle ein geeignetes g. Die Wahl von g wird von p abhängen. Es macht Sinn, die Fälle $p = 1$, $p = \infty$ und $1 < p < \infty$ getrennt zu betrachten.

(b)Dreiecksungleichung!

(c)O.b.d.A. sei $F \geq 0$. Überlege dir, weshalb die Ausdrücke alle wohldefiniert sind. Auf der linken Seite steht

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}^k} F(x, \cdot) d\mu(x) \Big\|_{L^p}.$$

Verwende nun (a). Fubini kann wieder eine Hilfe sein.

(d)Die gesuchte Ungleichung ist:

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}^k} F(x, \cdot) d\mu(x) \Big\|_{L^\infty} \leq \int_{\mathbb{R}^k} \|F(x, \cdot)\|_{L^\infty} d\mu(x).$$