

Wiederholung: Das Lebesgue-Stieltjes Mass

Wir wollen kurz Lebesgue-Stieltjes Masse anschauen und auf einige mögliche Unklarheiten in der Definition eingehen.

Definition

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine linksstetige monoton steigende Funktion. Dann definieren wir die Funktion λ_F folgendermassen:

$$\lambda_F[a, b) = \begin{cases} F(b) - F(a) & \text{für } b > a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies erweitern wir dann zu einem Mass:

$$\Lambda_F(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F[a_k, b_k), A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k) \right\}$$

Wie euch vielleicht aufgefallen ist, habe ich λ_F Funktion genannt und nicht (Prä)-Mass. Auch wenn es auf den ersten Blick den Eindruck machen kann, ist λ_F kein (Prä)Mass (Wieso?¹). Nun mag man sich die Frage stellen, wie dann die Definition von Λ_F Sinn macht.

In der Tat darf hier nicht die Carathéodory-Hahn Erweiterung (THM 1.2.20) angewendet werden. Deshalb verwenden wir das etwas schwächere Resultat Thm 1.2.17, i.e.

Theorem 1 (Theorem 1.2.17:). *Sei $\mathcal{K}$ eine Überdeckung von X und $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty]$ eine Funktion mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Dann definiert*

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_j) : K_j \in \mathcal{K}, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right\}$$

ein Mass.

Die halboffenen Intervalle überdecken $\mathbb{R}$ klarerweise, also können wir dieses Theorem anwenden und so das Lebesgue-Stieltjes Mass definieren.

Einige kurze Kommentare dazu:

- Das Selbe gilt auch für die Konstruktion des Hausdorffmasses (Auch wenn im Skript einfach die Eigenschaften eines Masses direkt gezeigt werden).
- Thm 1.2.17 kann zwar allgemeiner angewendet werden, als die Carathéodory-Hahn Erweiterung, ist aber auch schwächer. So kann es unter Theorem

¹Das Set aller halboffenen Intervalle ist an sich noch keine Algebra. Beachte aber das man dieses Problem leicht lösen kann, indem man endliche Vereinigungen zulässt. Dies ist ganz ähnlich zu Aufgabe 3.3

1.2.17 vorkommen das $\lambda(A) = 1 > \mu(A) = 0$ (Wie?²), wohingegen die Carathéodory-Hahn Erweiterung garantiert das $\mu(A) = \lambda(A)$ immer dann wenn A in der Algebra ist.

²Sei $X = \mathbb{R}$ $\mathcal{K} = \{\emptyset, [0, 1], \mathbb{R}\}$ $\lambda([0, 1]) = 1$ und $\lambda(\mathbb{R}) = 0$

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

- Wie sehen Elemente in E aus?
- Wie könnte man $[0, 1] \setminus E$ überdecken?

Aufgabe 5.2

- Betrachte $\gamma(t) = (t, 0)$ für $t \in [0, 1]$
- Was passiert bei der Berechnung der Bogenlänge?
- Überlege das selbe für $\mathcal{H}^1(\text{Im}(\gamma))$, wie sehen die Bälle aus?
- Was ändert sich wenn γ "gekrümmt" ist?

Aufgabe 5.3

Part a)

-

Part b)

- Obere Schranke: Schaut euch an wie das für das Cantor set funktioniert hat. (Guide 4)
- Untere Schranke: Wie sieht diese Projektion aus?
- Welche Eigenschaften hat eine Projektion?
Tipp: ?egassuA ehcilztün enie uzad rhi tnneK ?gitetS se tsi essaM mehclew nI

Aufgabe 5.4

Was passiert mit einer Überdeckung unter f ?

Aufgabe 5.5

Bitte beachte das die Gleichung nur für $s = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ gilt. Es wäre aber auch gar nicht anders möglich. Wieso?

- Schaut euch beide Ungleichungen einzeln an
- Was wäre eine sinnvolle Überdeckung der Intervalle?
- Was wisst ihr über eine beliebige (offene) Überdeckung der Cantormenge?
- Wieviele Intervalle der Cantormenge (bzw eines C_n) kann ein Ball höchstens überschneiden?