Borelmass

Ein Mass μ auf $\mathbb{R}^n$ heisst **Borelmass**, falls jede Borelmenge μ-messbar ist. Ein Borelmass μ heisst **(Borel-)regulär**, falls für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $A \subseteq B$ und $\mu(A) = \mu(B)$. Ein Borelmass μ heisst **Radonmass**, falls es Borel-regulär ist und jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ endliches Mass hat: $\mu(K) < \infty$.

Bemerkungen:

1. Die Definitionen können auf Masse auf beliebigen Hausdorffräumen verallgemeinert werden.
2. Ein Mass μ auf $\mathbb{R}^n$ heisst **lokal endlich**, falls für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung U_x existiert mit $\mu(U_x) < \infty$. Ein regläres Borelmass μ ist ein Radonmass genau dann wenn μ lokal endlich ist. (Der Beweis folgt.)
3. **Warnung:** In der Literatur findet man unterschiedliche Definitionen für all diese Begriffe. Zum Beispiel wird für ein Borelmass manchmal lokale Endlichkeit verlangt. Man sollte also immer überprüfen, welche Definitionen verwendet werden.

Lasst uns nun die Behauptung in der zweiten Bemerkung beweisen. Angenommen μ ist ein Radonmass. Für $x \in \mathbb{R}^n$ betrachte den offenen Ball $B_1(x)$ und den abgeschlossenen Ball $\overline{B_1(x)}$ um x. Es gilt:

$$\mu(B_1(x)) \leq \mu(\overline{B_1(x)}) < \infty,$$

weil $\overline{B_1(x)}$ kompakt ist und μ ein Radonmass ist. Also ist μ lokal endlich. Nehmen wir nun an, dass μ ein lokal endliches reguläres Borelmass ist. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Für jedes $x \in K$ existiert eine offene Umgebung U_x mit $\mu(U_x) < \infty$. $\{U_x\}_{x \in K}$ ist eine offene Überdeckung von K. Wegen Kompaktheit von K existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$, sodass $K \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Es folgt

$$\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(U_{x_i}) < \infty.$$

Also ist μ ein Radonmass.

In Aufgabe 1 werdet ihr Beispiele von Radon- und "Nicht-Radon"massen sehen:

Aufgabe 6.1.
Beweise die folgenden Aussagen.

(a) $\mathcal{L}^n$, Λ_F sind Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$, beziehungsweise $\mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{H}^s$ für $s < n$ ist kein Radonmass, für $s \geq n$ aber schon ein Radonmass.

(c) Falls μ ein Radonmass ist, $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, so ist auch $\mu \llcorner A$ mit

$$(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B), B \subset \mathbb{R}^n$$

ein Radonmass.

Hints: Corollary 1.3.14, Theorem 1.6.4 und Theorem 1.7.3 im Skript besagen, dass $\mathcal{L}^n$, Λ_F und $\mathcal{H}^s$ Borel-reguläre Masse sind. Insbesondere ist $\mathcal{H}^s$ Borel-regulär für $s < n$, aber (wie ihr in (b) zeigt), kein Radonmass.

*(a) Kompakte Mengen in $\mathbb{R}^n$ sind beschränkt.
Betrachte das Lebesgue-Stieltje-Mass auf Bällen.*

(b) Verwende, dass für messbare $A \subseteq \mathbb{R}^n$ die Gleichheit $\mathcal{L}^n(A) = C_n\mathcal{H}^n(A)$ gilt. Hier ist $C_n > 0$ eine Konstante. Verwende Aufgabe 4.4.

(c) Um Borel-Regularität zu zeigen, muss man für jedes $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge E finden mit $B \subseteq E$ und $(\mu \llcorner A)(B) = (\mu \llcorner A)(E)$. Nutze dafür die Borel-Regularität von μ für die Mengen $A \cap B$ und $B \backslash A$.

In der nächsten Aufgabe zeigt ihr, dass Borel-Mengen bezüglich eines Radon-Masses durch offene Mengen "approximiert" werden können.

Aufgabe 6.2.
Das Ziel dieser Aufgabe ist es, das Lemma 1.8.3 aus dem Skript zu beweisen:

Lemma. *Sei μ ein Radon-Mass auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists G \text{ offen}, B \subset G : \mu\big(G \setminus B\big) < \varepsilon$$

(a) Beweise, dass jede abgeschlossene Menge F in $\mathbb{R}^n$ sich als abzählbarer Durchschnitt offener Mengen, die F enthalten, schreiben lässt.

(b) Unter Verwendung der Tatsache, dass $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, folgere, dass es reicht das Lemma für μ ein endliches Radon-Mass zu beweisen. Nutze Restriktionen von μ auf kompakte Teilmengen.

(c) Definiere:

$$\mathcal{A} := \big\{B \subset \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0, \exists G \text{ offen}, B \subset G : \mu(G \setminus B) < \varepsilon\big\}$$

Bemerke, dass alle offenen Mengen in $\mathcal{A}$ liegen. Zeige, dass $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist.

(d) Prüfe, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten ist.

(e) Definiere $\mathcal{A}' := \big\{B \subset \mathbb{R}^n \mid B \in \mathcal{A} \text{ und } B^c \in \mathcal{A}\big\}$. Folgere aus den bisherigen Schritten, dass $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra ist, welche alle Borel-Mengen enthält. Folgere die gewünschte Aussage.

Hints:

(a) Es kann hilfreich sein, den Abstand zwischen einer Menge und einem Punkt zu verwenden: Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ definiert man den Abstand von A zu x als

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}.$$

Hier verwenden wir z.B. die euklidsche Metrik d auf $\mathbb{R}^n$. Ein Kandidat für eine Umgebung von A ist dann

$$\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, A) < \epsilon\}$$

für ein $\epsilon > 0$.

(b) Wir nehmen an, dass das Lemma bereits für endliche Radonmasse gezeigt ist. Sei μ ein beliebiges Radonmass. Wir wollen zeigen, dass das Lemma auch für μ gilt. Betrachte dazu $\mu_n := \mu \llcorner B_n(0)$. Ist das ein endliches Radonmass? Wenn ja, so können wir das Lemma auf μ_n anwenden!

Messbare Funktionen

In den restlichen Aufgaben geht es um messbare Funktionen. Sei μ ein Mass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Teilmenge. Dann heisst eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ **μ-messbar**, falls Urbilder von Borelmengen μ-messbar sind. Die nächste Aufgabe gibt uns äquivalente Definitionen.

Aufgabe 6.3.
Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeige, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

i) $f^{-1}(U)$ ist μ-messbar für jedes offene $U \subset \mathbb{R}$

ii) $f^{-1}(B)$ ist μ-messbar für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$.

iii) $f^{-1}(]-\infty, a[)$ ist μ-messbar für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Hints: Für (i) $\Rightarrow$ (ii) gibt es einen eleganten Weg. Die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$ ist generiert durch die offenen Mengen. Finde eine geeignete σ-Algebra $\mathcal{A}$, welche dank (i) die offenen Mengen enthält, und dessen Folgerung, dass $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$, genau (ii) gibt.

Die Aufgaben 6.4 und 6.5 sind durch Verwendung der Definitionen und der Grundeigenschaften in Theorem 2.2.4 zu lösen. Wir gehen nun genauer auf messbare Funktionen bezüglich Borelmassen ein.

Wenn μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}^n$ ist, so ist jede stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar. Wieso? Urbilder von offenen Mengen unter f sind offen in Ω. Konkret ist also für jedes offene $V \subset \mathbb{R}$ das Urbild von der Form $f^{-1}(V) = \Omega \cap U$ für ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung ist Ω μ-messbar. U ist μ-messbar, weil μ ein Borelmass und U offen ist. Deshalb ist auch $\Omega \cap U$ μ-messbar. Es folgt nun aus der Charakterisierung in Aufgabe 6.3., dass f μ-messbar ist.

Grundsätzlich sollte eine Veränderung von f, die nur auf einer μ-Nullmenge stattfindet, die μ-Messbarkeit von f nicht verlieren. (Die ganzen Begriffe in Mass und Integral sollten sich grundsätzlich nicht um Nullmengen kümmern.) In der nächsten Aufgabe zeigt ihr, dass eine μ-fast überall stetige Funktion tatsächlich immer noch messbar ist:

Aufgabe 6.4.
Sei μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ μ-fast überall stetig (d. h. die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist eine μ-Nullmenge). Zeige, dass f μ-messbar ist.

Hints: μ-Nullmengen sind immer μ-messbar! Insbesondere ist die Menge

$$N := \{x \in [a,b] | f \text{ ist nicht stetig in } x\}$$

μ-messbar.

Obwohl die letzte Aufgabe abschreckend wirkt (man muss etwas für alle monotonen Funktionen zeigen), ist die Lösung nur eine Zeile! Nebenbei ist es auch ein sehr nützliches Resultat! Das sollte genügend Motivation sein, diese Aufgabe zu lösen:

Aufgabe 6.5.
Sei μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ μ-messbar ist.