

Wiederholung

Nachdem ihr nun das Integral definiert habt, geht es jetzt darum weitere Eigenschaften dazu zu zeigen. Als alles erstes wäre esch schön das diese neue Integral mit dem alten Riemann-Integral übereinstimmt. Tatsächlich gilt:

Theorem 1. Sei μ das Lebesquemass und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-Integrierbare Funktion. Dann ist f Lebesque-Integrierbar und $\int_a^b f dx = \int_{[a,b]} f d\mu$.

Sprich das Lebesque-Integral ist eine Erweiterung des Riemann-Integrales.¹

Konvergenzsätze

Im weiteren möchte ich kurz auf die beiden gebräuchlichsten Konvergenzsätze eingehen (Sprich wann darf man eine Summe oder auch ein Limes in das Integral hineinziehen). Einige dieser Sätze kommen euch wahrscheinlich aus der Vorlesung MMP bekannt vor.

Theorem 2. *Dominierte Konvergenz. (Dominated Convergence)*

Sei $f_k \rightarrow f$ eine μ -fast überall konvergente Folge von μ -messbaren Funktionen. Sodass eine μ -summierbare Funktion g existiert mit $|f_k| \leq g$ Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

sowie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu = 0$$

Sprich wenn ihr die folge von unten und oben beschränken könnt dann dürft ihr auch den limes hineinziehen.

Das andere häufig verwendete Theorem ist der Satz der Monotonen Konvergenz:

Theorem 3. *Monotone Konvergenz (Beppo-Levi)*

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine von unten beschränkte, aufsteigende Folge. Sprich $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k \leq$ und $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \Omega \forall k \in \mathbb{N} f_k(x) \geq c$ Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu$$

Beachte hier das die punktweise Konvergenz der Funktionen durch die Monotonie impliziert wird.

Dieses Theorem wird auch häufig angewendet um Summen in das Integral hineinzuziehen. Sei zum Beispiel $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ mit $g \geq 0$ dann ist $f_n = \sum_{k=1}^n g_k$ eine Folge von Funktionen welche gegen f konvergieren und die Anforderungen von vorher erfüllen.

¹Beachte jedoch das eine Riemann-Integrierbare Funktion nicht zwangsläufig μ summierbar sein muss, vergleiche mit Aufgabe 8.6

Ein weiterer nennenswerter Konvergenzsatz ist der Satz von Fatou. Dieser findet zwar weniger häufig direkten Einsatz, ist aber für den Beweis der Konvergenzsätze wichtig.

Obwohl diese Theoreme bereits sehr viele Fälle abdecken, lassen sie immer noch einige Fragen offen. Insbesondere gibt keiner dieser Sätze ein Kriterium wann man den Limes nicht ins Integral ziehen kann. Diese Frage wird sich schon bald mit dem Satz von Vitali beantworten. Dieser Satz gibt eine hinreichende und notwendige Bedingung an (sprich eine äquivalente). Jedoch braucht ihr für dieses Theorem noch ein wenig zusätzliche Notation weshalb ich es hier nicht hinschreiben werde.

Tipps und Bemerkungen

8.1

In dieser Aufgabe zeigt ihr das die Definition des Integrals aus dem Skript für simple Funktionen wohldefiniert ist. Danach zeigt ihr einige weitere Eigenschaften.

In Teil a und b geht es darum zu zeigen das $\int f d\mu$ nicht von der Repräsentation der Funktion abhängt. I.e. $f = \sum a_n \chi(A_n) = \sum b_n \chi(B_n)$ impliziert $\int f d\mu = \sum a_n \mu(A_n) = \sum b_n \mu(B_n)$.

Tipp: Betrachtet die Verfeinerung von zwei Repräsentationen, das heisst definiert euch $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so dass jedes A_n als $A_n = \cup_{i \in I} C_i$ geschrieben werden kann.

In Teil c und d geht es darum Monotonie respektive Linearität zu zeigen.

Teil e) Hier wollt ihr zeigen dass die Definition des Integrals für Simple Funktionen mit der allgemeineren Definition des Integrales Konsistenz ist.

8.2

Wie beim Riemann-Integral gilt auch hier $|\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$ (Wieso?). In der Aufgabe geht es zu zeigen das lediglich für $f \geq 0$ oder $f \leq 0$ Gleichheit gelten kann.

Tipp: Betrachte $f = f^+ - f^-$

8.3

Tipp: Gegen welche Funktion konvergiert $x^k \cdot f$ punktweise?

8.4

Tipp:

1. Betrachtet sehr langsam abfallende Funktionen.
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n = ?$

8.5

Teil a)

1. Fast überall absolut konvergiert, bedeutet das für fast alle x
 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty$
2. Überlegt euch wie ihr Linearität des Integrales verwenden könnt. Achtung
Linearität funktioniert nur für endliche summen!
3. Was bedeutet es wenn $\int_{\Omega} g(x) d\mu < \infty$ gilt?

Teil b)

Verwende Teil a)

8.6

Tipp: Was für Folgen kennt ihr, welche konvergieren aber nicht absolut konvergieren?