Probability and Statistics

Exercise sheet 14

Please ask questions in the exercise classes and/or post your questions (anonymously if you want) in this file: https://docs.google.com/document/d/1FuW9HQponei5ipS4j2J3lM4dfiP7MVQQ_0cMB1UUAXg/edit?usp=sharing

You do not have to hand in your solutions. There will be no corrections of Exercise sheet 14. The solution will be uploaded on the web page.

Exercise 14.1

Let $X_1 \dots X_n$ be i.i.d. with a continuous distribution F. The sign test is a test where the null hypothesis is that the median of X is m, i.e.

$$F(m) = \frac{1}{2}.$$

Use the duality theorem (Theorem 8.3.1 in the lecture notes) to construct an approximate confidence interval for the median of F at level 95%.

Exercise 14.2 We want to investigate the effect of an outlier on confidence intervals. Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ with unknown σ.

(a) Give the two-sided confidence interval for the unknown parameter μ with level α.

(b) How does the realized confidence interval behave for $x_1 \to \infty$ and fixed $x_2, \dots, x_n$?
Hint: Show first for every $c \in \mathbb{R}$ that $\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_n)^2 + n(c - \overline{x}_n)^2$.

Exercise 14.3 In einer Nagelfabrik will man die Länge der produzierten Nägel möglichst genau schätzen. Man nimmt an, dass die Längen der Nägel $X_i, i = 1, ..., n$, unabhängig und approximativ normalverteilt sind mit Varianz 1 mm^2 und unbekanntem Erwartungswert μ mm. Wieviele Nägel muss man mindestens messen, damit das zweiseitige 95%-Konfidenzintervall für μ höchstens Länge 0.5 mm hat?

Exercise 14.4 Wie oft muss man eine Münze werfen, damit das 99%-Konfidenzintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit p (Kopf wird als Erfolg interpretiert) höchstens Länge 0.01 hat?
Hinweis: Benutzen Sie die Normalapproximation. Die Intervallgrenzen hängen noch von p ab. Maximieren Sie nun über p.

If you have feedback regarding the exercise sheets, please send a mail to Jakob Heiss.