FORMELSAMMLUNG
für
Wahrscheinlichkeit und Statistik
FS 2020

1 Einige diskrete Verteilungen

1. **Binomialverteilung**

   $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$:

   $$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{für } k \in \{0,1,\ldots,n\},$$

   $\mathbb{E}[X] = np$, $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

2. **Geometrische Verteilung**

   $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ mit $p \in (0,1)$:

   $$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p \qquad \text{für } k \in \{1,2,\ldots\},$$

   $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

3. **Poisson-Verteilung**

   $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$:

   $$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{für } k \in \{0,1,2,\ldots\},$$

   $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $\mathrm{Var}[X] = \lambda$.

4. **Hypergeometrische Verteilung**

   $X \sim \mathrm{Hypergeom}(n,N,K)$ für positive ganze Zahlen n,N,K mit $\max(n,K) \leq N$:

   $$p_X(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
   für $k \in \{\max(0, n-N+K), \ldots, \min(n,K)\}$,

   $\mathbb{E}[X] = n\frac{K}{N}$, $\mathrm{Var}[X] = n\frac{K}{N}(1-\frac{K}{N})\frac{N-n}{N-1}$.

2 Einige stetige Verteilungen

1. **Gleichverteilung**

   $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ mit $a < b$:

   $$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x),$$

   $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

2. **Exponentialverteilung**

   $X \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$ mit $\alpha > 0$:

   $$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x} I_{(0,\infty)}(x),$$

   $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\alpha^2}$.

3. **Gammaverteilung**

   $X \sim \mathrm{G}(\beta,\alpha)$ mit $\beta, \alpha > 0$:

   $$f_X(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} I_{(0,\infty)}(x),$$

   $\mathbb{E}[X] = \frac{\beta}{\alpha}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{\beta}{\alpha^2}$.

4. **Normalverteilung**

   $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$:

   $$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

   $\mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$.

   Für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ nennen wir X standardnormalverteilt und bezeichnen die Verteilungsfunktion (VF) mit Φ.

3 Einige Ungleichungen

1. **Markov-Ungleichung**

   Seien X eine Zufallsvariable und $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ wachsend. Für jedes c mit $g(c) > 0$ gilt dann

   $$\mathbb{P}[X \geq c] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(c)}.$$

2. **Chebyshev-Ungleichung**

   Sei X eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert existiert und die endliche Varianz hat. Für jedes $c > 0$ gilt dann

   $$\mathbb{P}\big[|X - \mathbb{E}[X]| \geq c\big] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{c^2}.$$

3. **Cauchy–Schwarz-Ungleichung**

   Seien X, Y Zufallsvariablen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2]$ beide endlich. Dann gilt

   $$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]}.$$

4. **Jensen-Ungleichung**

   Seien X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann gilt

   $$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X]).$$

   Ist g strikt konvex, so gilt Gleichheit genau dann, wenn $\mathbb{P}[X = \mathbb{E}[X]] = 1$.

4 Verschiedenes

1. **Kovarianz**

   Für zwei Zufallsvariablen X, Y auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|Y|], \mathbb{E}[|XY|]$ alle endlich ist

   $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E\big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\big]\\ &= \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

   Cov ist bilinear und symmetrisch.

2. **Korrelation**

   Für zwei Zufallsvariablen X, Y auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathrm{Var}[X], \mathrm{Var}[Y]$ beide endlich ist

   $$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}}.$$

   Es gilt immer $-1 \le \mathrm{corr}(X,Y) \le 1$, mit Gleichheit genau dann, wenn $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ existieren mit $\mathbb{P}[Y = aX + b] = 1$ und $\mathrm{sign}(a) = \mathrm{sign}(\mathrm{corr}(X,Y))$.

5 Einige Teststatistiken

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit einer geeigneten Verteilung (die vom gewünschten Test abhängt). Seien $Y_1, \dots, Y_m$ i.i.d. Zufallsvariablen, die unabhängig von $X_1, \dots, X_n$ sind und mit einer geeigneten Verteilung (die vom gewünschten Test abhängt). Sei

$$\begin{aligned}\overline{X}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, & S_X^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X}_n)^2,\\ \overline{Y}_m &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m Y_k, & S_Y^2 &= \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^m (Y_k-\overline{Y}_m)^2.\end{aligned}$$

1. **Ein-Stichproben-t-Test**

   $$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_X/\sqrt{n}}.$$

2. **z-Test**

   $$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

3. **Zwei-Stichproben-t-Test**

   $$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{1}{n+m-2}((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2)}}.$$

4. **Vorzeichentest**

   $$T = \sum_{i=1}^n I_{\{X_i > \mu_0\}}.$$

5. **Zwei-Stichproben-Wilcoxon-Test**

   $$T = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m I_{\{X_i < Y_k\}}.$$

6. **χ^2-Anpassungstest**

   $$T = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n\theta_{0,i})^2}{n\theta_{0,i}}.$$

In allen Fällen kennt man die Verteilung der Teststatistik T unter der Nullhypothese (exakt oder approximativ) und findet die relevanten Quantile in den entsprechenden Tabellen.