Les espaces riemanniens symétriques

Par Elie Cartan, Paris

Je me propose de consacrer cette Conférence à une théorie géométrique qui, d'intérêt assez restreint à son origine, s'est révélée en rapport étroit avec différentes branches des Mathématiques: la théorie des groupes de transformations, la théorie des fonctions et la théorie arithmétique des formes, l'Analysis situs.

I.

Les espaces riemanniens symétriques comprennent en particulier les espaces à courbure constante et les espaces hermitiens, dont ils constituent une généralisation. Ils peuvent être définis par deux propriétés caractéristiques, en apparence toutes différentes:

1^0 *La courbure riemannienne en un point quelconque A suivant un élément plan quelconque issu de A se conserve quand on transporte cet élément plan par parallélisme suivant un chemin quelconque.*

2^0 *La symétrie par rapport à un point quelconque A est une transformation isométrique:* la symétrie se définit en faisant correspondre à un point M, suffisamment voisin de A, le point M' obtenu en construisant l'arc de géodésique $M\,A$ et le prolongeant d'une longueur égale $A\,M'$.

L'équivalence des deux définitions tient à ce que le transport par parallélisme d'un vecteur d'un point A à un point infiniment voisin A' résulte des deux symétries successives par rapport à A et par rapport au milieu de l'arc de géodésique $A\,A'$. Si la symétrie est une transformation isométrique, le transport parallèle conserve la métrique et par suite la courbure; la réciproque se démontre facilement.

Un espace riemannien symétrique admet un groupe transitif de déplacements rigides. Si en effet A et B sont deux points quelconques, suffisamment voisins, le produit des symétries par rapport à A et au milieu de l'arc de géodésique $A\,B$ est une isométrie qui amène A en B; comme elle fait partie d'une famille continue d'isométries comprenant l'isométrie identique, c'est un déplacement proprement dit. Elle fait partie du plus grand groupe G de déplacements de l'espace. Nous supposerons que G est un groupe de Lie engendré par des transformations infinitésimales. L'espace est donc un *espace de Klein* de groupe G. Nous appellerons groupe d'isotropie en A et nous désignerons par g_A le sous-groupe de G qui laisse fixe le point A, ou plutôt la partie connexe de ce sous-groupe qui contient la transformation identique.

II

Les symétries σ_A par rapport aux différents points de l'espace jouissent des propriétés suivantes:

1⁰ *σ_A est une transformation involutive;*

2⁰ *σ_A admet le point A comme point invariant isolé;*

3⁰ *σ_A transforme entre elles les opérations de G;*

4⁰ *σ_A laisse invariante chacune des opérations de g_A;*

5⁰ *Les différentes symétries σ_A sont transformées entre elles par le groupe G.*

Dans l'énoncé précédent, la propriété de G d'être un groupe de déplacements n'intervient pas. Cela permet d'étendre la notion d'espace symétrique à des espaces de Klein non riemanniens. Il suffit, pour que l'espace soit symétrique, qu'on puisse associer à un seul point particulier O une transformation σ_0 jouissant des quatre premières propriétés énoncées; on prendra alors pour σ_A la transformations $\sigma_A = S\sigma_0 S^{-1}$ transformée de σ_0 par l'une quelconque S des transformations de G qui amènent O en A.

L'espace euclidien, l'espace non euclidien, l'espace affine sont des espaces symétriques, dont les deux premiers seuls sont riemanniens. Il peut du reste arriver qu'un espace de *Klein* soit symétrique de plusieurs manières.

On peut définir dans un espace symétrique, riemannien ou non, une famille de lignes, que nous appellerons *géodésiques*, sur chacune desquelles on peut introduire une métrique intrinsèque.

Partons de deux points A_0 et A_1; construisons le symétrique A_2 de A_0 par rapport à A_1, le symétrique A_3 de A_1 par rapport à A_2, et ainsi de suite; dans l'autre sens nous construisons de même le symétrique A_{-1} de A_1 par rapport à A_0, etc. Soit σ_i la symétrie par rapport à A_i, et T la transformation $\sigma_1\,\sigma_0$, qui appartient à G. On démontre très facilement les relations

$$\sigma_i = T^i\sigma_0 = \sigma_0\,T^{-i},\ \ \sigma_q = T^{q-p}\,\sigma_p = \sigma_p\,T^{p-q},\ \ \sigma_q\,\sigma_p = T^{q-p}.$$

La transformation T^p fait passer du point A_i au point A_{i+2p}; il est naturel d'appeler *distance* des deux points ordonnés A_p, A_q, à un facteur constant près, le nombre $q-p$, exposant de la puissance à laquelle il faut élever T pour obtenir $\sigma_q\,\sigma_p$.

Si les points A_0 et A_1 sont suffisamment rapprochés pour que T soit engendrée par une transformation infinitésimale de G, cette transformation engendrera un groupe continu à un paramètre T_t, t étant le paramètre *canonique* choisi de manière qu'on ait

$$T_t\,T_{t'} = T_{t+t'}$$

Les transformations $\sigma_t = T_t\,\sigma_0 = \sigma_0\,T_{-t}$ seront alors des symétries par rapport à des points A_t formant une ligne continue, que nous appellerons une *géodésique* de l'espace, et qui sera la *géodésique de base* du groupe T_t. Nous donnerons à ces transformations T le nom de *transvections*. On voit facilement qu'une transvection dont la géodésique de base passe par A est caractérisée par la propriété d'être transformée en son inverse par σ_A. Par la transvection T_t, la géodésique de base glisse sur elle-même, chaque point avançant d'une longueur $k\,t$ ($k =$ longueur fixe).

Les géodésiques d'un espace symétrique jouissent des deux propriétés suivantes:

1⁰ *Par deux points suffisamment rapprochés il en passe une et une seule;*

2⁰ *Elles sont transformées entre elles par le groupe G de l'espace et par les différentes symétries σ_A.*

Un raisonnement géométrique extrêmement simple montre que ces deux propriétés sont caractéristiques, de sorte que si l'espace est riemannien et si les symétries sont isométriques, ces lignes ne sont autres que les géodésiques ordinaires.

Il est clair que les unités de longueur, qui restent arbitraires sur chaque géodésique, ne peuvent pas toujours être choisies de manière à obtenir dans tout l'espace une métrique invariante par G. Cela en particulier sera impossible si, comme dans l'espace affine, il existe une transformation de G permettant d'amener en coïncidence deux segments arbitraires d'une même géodésique.

Mais, avant d'arriver à caractériser, parmi les espaces symétriques, ceux qui sont riemanniens, voyons comment, le groupe G étant donné comme groupe abstrait, on peut construire les espaces symétriques correspondants.

La symétrie σ_A transforme entre elles les opérations de G; elle le fait évidemment de manière que S'_1 et S'_2 étant les transformées de S_1 et S_2, la transformée de $S_1 S_2$ soit $S'_1 S'_2$. Autrement dit σ_A définit une *automorphie involutive* de G.

Réciproquement soit σ_0 une automorphie involutive de G. Considérons la famille continue des automorphies involutives transformées de σ_0 par les différentes opérations de G[1]), et l'espace représentatif de ces automorphies. Il est facile de voir que c'est un espace transformé transitivement par G, et symétrique. Le groupe d'isotropie relatif au point O représentatif de l'automorphie σ_0 est formé des opérations de G invariantes par σ_0 (ou plutôt de la partie connexe contenant l'opération identique); nous l'appellerons le *sous-groupe caractéristique* de l'automorphie σ_0.

En définitive *la recherche des espaces symétriques de groupe donné G revient à celle des automorphies involutives de G.*

III

Revenons maintenant aux espaces symétriques riemanniens. Supposons, *ce qui est une hypothèse essentielle pour la suite*, que le ds^2 de l'espace soit défini. Le groupe

[1]) Si σ_0 fait correspondre à S l'opération $\bar{S}$, la transformée de σ_0 par S_0 fera correspondre à S l'opération $S_0\ \bar{S}_0^{-1}\ \bar{S}\ \bar{S}_0\ S_0^{-1}$.

d'isotropie g_A appartient alors à une catégorie de groupes dont M. *H. Weyl* a montré l'importance dans la théorie des représentations linéaires des groupes; c'est un groupe *clos*, ce qui signifie que tout ensemble infini d'opérations de g_A admet au moins un élément d'accumulation appartenant à g_A. Au point de vue de la structure, un groupe clos est, au moins infinitésimalement, le produit direct de groupes simples et, éventuellement, de groupes à un paramètre, tous échangeables entre eux.

Réciproquement soit G un groupe abstrait donné, et σ_0 une automorphie involutive dont le sous-groupe caractéristique g_0 soit clos. On peut définir dans l'espace symétrique correspondant une métrique riemannienne invariante par G. En effet soit O le point représentatif de σ_0. Le sous-groupe g_0, considéré comme opérant sur les vecteurs d'origine O, est un groupe linéaire clos; d'après un théorème de M. *H. Weyl*, il laisse invariante au moins une forme quadratique définie positive, qui donnera par convention le carré de la longueur d'un vecteur, ou encore le carré de la distance du point O à tout point infiniment voisin. La métrique ainsi définie en O s'étend, grâce aux opérations de G, à l'espace tout entier. On démontre facilement que la métrique riemannienne ainsi obtenue est invariante par G et aussi par la symétrie σ_0; elle concorde donc, sur chaque géodésique, avec celle que le procédé des symétries successives avait permis d'y définir. Il peut arriver que le groupe linéaire clos g_0 laisse invariantes plusieurs formes quadratiques définies; les géodésiques seront donc les mêmes pour ces différentes métriques, et sur chaque géodésique le rapport des longueurs de deux segments donnés sera aussi le même.

En définitive, la détermination des espaces riemanniens symétriques est ramenée à celle des groupes admettant une automorphie involutive à sous-groupe caractéristique clos.

On peut simplifier le problème. Si en effet le groupe linéaire d'isotropie laisse invariant un élément plan, on démontre que l'espace est le produit topologique de deux espaces riemanniens symétriques: il est *réductible*. Il suffit de déterminer les espaces *irréductibles*.

IV

Une méthode consiste à déterminer directement tous les groupes d'isotropie possibles par les procédés de la géométrie riemannienne. Les calculs sont fort longs. Signalons cependant le résultat fondamental suivant:

A un groupe d'isotropie donné correspondent, abstraction faite du choix arbitraire de l'unité de longueur, deux espaces riemanniens symétriques irréductibles, l'un ouvert à courbure riemannienne partout négative ou nulle, l'autre clos à courbure riemannienne partout positive ou nulle.

Une méthode beaucoup plus rapide consiste à déterminer tous les groupes de déplacements possibles. Une analyse relativement simple fondée sur la théorie de la structure des groupes montre que si l'on fait abstraction des espaces euclidiens ou localement euclidiens, qui sont du reste réductibles pour $n \geq 2$ dimensions, le groupe G est *simple* ou se décompose en deux groupes simples clos isomorphes entre eux et échangeables entre eux. De plus le groupe d'isotropie est un sous-groupe clos maximum de G.

Dans le dernier cas indiqué *l'espace est l'espace représentatif des opérations d'un groupe simple clos*. Si l'on désigne les opérations du groupe par les symboles $S_a, S_\xi, \ldots$, e déplacement le plus général est donné par la formule

$$S_{\xi'} = S_a \, S_\xi \, S_b^{-1};$$

la symétrie par rapport au point S_a fait passer de S_ξ à $S_a \, S_\xi^{-1} \, S_a$. M. *J. A. Schouten* et moi avons étudié cette métrique.

Avant d'examiner le cas où le groupe des déplacements est simple, rappelons quelques résultats de la théorie des groupes simples. Killing et moi-même avons déterminé toutes les structures de groupes simples *à paramètres complexes*. Un tel groupe, d'ordre r, doit, à notre point de vue, être considéré comme étant à $2\,r$ paramètres réels. Mais il existe des *formes réelles* de ce groupe, c'est-à-dire des groupes à r paramètres réels tels que l'on passe de l'un d'eux au groupe total en regardant ces paramètres comme complexes, ce qui a un sens, à cause de l'analyticité de la loi de composition du groupe. Parmi ces formes réelles, il y en a toujours une qui est close, d'autres qui sont ouvertes. Je les ai déterminées en 1913 par une méthode directe conduisant malheureusement à de longs calculs, que la théorie des espaces symétriques permet d'éviter dans une large mesure. Nous désignerons par Γ le groupe simple à paramètres complexes, par G_u une forme réelle close, par G une forme réelle ouverte. Le groupe Γ est lui-même ouvert.

Construisons d'abord un espace riemannien symétrique de groupe Γ; nous montrerons ensuite que cet espace est unique. Choisissons pour cela les paramètres de Γ de manière que les transformations à paramètres tous réels engendrent le groupe clos G_u. Ce groupe G_u est évidemment le sous-groupe caractéristique de l'automorphie involutive σ_u de Γ qui consiste à remplacer les paramètres de Γ par leurs complexes conjugués. L'espace symétrique correspondant, que nous appellerons E_Γ, est le lieu des différents transformés de G_u par les transformations de Γ; il est à r dimensions. On montre très simplement que par deux points de cet espace il passe une géodésique et une seule, et que les géodésiques issues d'un point remplissent tout l'espace, qui est ainsi homéomorphe à l'espace euclidien.

Montrons maintenent qu'il n'y a pas d'autre espace riemannien symétrique de groupe Γ. Il nous suffira pour cela de démontrer que tout sous-groupe clos g de Γ est soit G_u, soit le transformé de G_u par une opération de Γ, soit un sous-groupe des précédents. En effet le groupe g est un groupe de déplacements de l'espace E_Γ; appliquons ses différentes opérations à un point donné de l'espace; le lieu des transformés sera une variété *fermée* V invariante par g. Or, j'ai démontré que dans tout espace riemannien simplement connexe à courbure riemannienne partout négative ou nulle il existe un point et un seul qui réalise le minimum de la somme des carrés des distances à un ensemble de points donnés. La variété V, invariante par g, a donc une espèce de *centre*, invariant lui aussi par g; ce centre représente un des groupes homologues de G_u; le groupe g est donc ce groupe lui-même ou un de ses sous-groupes. Nous avons ainsi, par des considérations géométriques faites dans l'espace E_Γ, démontré:

1° que *les formes réelles closes de Γ forment une seule famille continue;*

2° que *tout espace riemannien, autre que E_Γ, admettant Γ pour groupe des déplacements, a un nombre de dimensions supérieur à celui de E_Γ et n'est pas symétrique.*

On peut donner à l'espace E_Γ le nom d'*espace riemannien fondamental de la géométrie de groupe Γ:* c'est ainsi que l'espace de *Lobatchefsky* est l'espace riemannien fondamental de la géométrie projective de la droite complexe.

V.

Avant de passer aux espaces riemanniens symétriques dont le groupe des déplacements est un groupe simple à paramètres réels, occupons-nous de la détermination des formes réelles ouvertes de Γ. Si G est une telle forme, on peut, comme on l'a fait tout à l'heure pour G, lui associer une automorphie involutive σ de Γ dont G soit le sous-groupe caractéristique. *Il existe au moins une forme réelle close invariante par σ.* En effet, dans l'espace E_Γ, σ définit une isométrie involutive; si A et A' sont deux points qui se correspondent dans cette isométrie, σ laisse invariante la géodésique AA'; faisant passer de A à A' et de A' à A, elle laisse invariant le milieu C de AA', et par suite la forme réelle close G_u que ce point C représente. Ajoutons, pour ne pas interrompre notre raisonnement géométrique, que si σ laisse invariants deux points C et C' de E_Γ, il laisse invariants tous les points de la géodésique qui les joint, de sorte que *le lieu des points invariants par σ est une variété connexe totalement géodésique V.*

Revenons au groupe clos G_u invariant par σ; l'automorphie involutive σ de Γ *induit* sur G_u une automorphie involutive dont la connaissance, comme on le voit facilement, entraîne inversement celle de σ. Par suite *la détermination des formes réelles ouvertes de Γ revient à la recherche des automorphies involutives d'une forme réelle close particulière G_u.* On est ainsi conduit à une méthode très simple, la structure d'un groupe clos, et par suite la recherche de ses automorphies involutives, présentant beaucoup moins de complications que pour un groupe ouvert.

Revenons maintenant dans notre espace E_Γ, et considérons la variété totalement géodésique V lieu des points invariants par σ. C'est évidemment un espace riemannien symétrique ouvert, homéomorphe à l'espace euclidien, et le groupe G le transforme isométriquement: c'est donc un espace riemannien symétrique admettant G pour groupe des déplacements. Un raisonnement identique à celui qui a été fait pour E_Γ montre que c'est le seul. Nous arrivons donc au théorème général suivant:

Il existe une forme riemannienne symétrique et une seule de la géométrie basée sur un groupe simple ouvert.

On voit de plus que l'*espace riemannien fondamental du groupe ouvert G est réalisable comme variété totalement géodésique de l'espace riemannien fondamental du groupe à paramètres complexes Γ.*

Enfin l'espace E_Γ fournit aussi une interprétation géométrique des espaces riemanniens symétriques admettant le groupe clos G_u comme groupe des déplacements. Ici il y en a plusieurs, autant que de formes réelles ouvertes de Γ. Si G est l'une de ces formes, V la variété totalement géodésique qui la représente, considérons toutes les variétés, transformées de V par Γ, qui passent par un même point fixe O. Le groupe G_u des rotations de E_Γ autour de O transforme entre elles ces différentes variétés, qui peuvent être regardées comme les éléments ou points d'un espace riemannien symétrique clos de groupe G_u. De sorte qu'en dernière analyse *la détermination des espaces symétriques irréductibles revient à celle des groupes simples et de leurs formes réelles.*

Dans mes „Leçons sur la géométrie projective complexe", j'ai développé, dans le cas où Γ est le groupe projectif complexe à trois dimensions, tous les aspects de la théorie que je viens d'esquisser; elle conduit à des aperçus géométriques nouveaux, sur lesquels je n'ai pas le temps d'insister.

VI.

Je termine cette Conférence en indiquant rapidement quelques applications.

Dans la théorie des fonctions automorphes et dans la théorie arithmétique des formes, interviennent des groupes proprement discontinus (au sens abstrait du mot) qui sont presque tous des sous-groupes de groupes simples *ouverts* G. Un tel groupe, tout en étant proprement discontinu *in abstracto*, peut opérer d'une manière improprement discontinue sur l'espace dans lequel on le considère; mais il est certain qu'il opérera d'une manière proprement discontinue sur l'espace riemannien fondamental du groupe ouvert G dont le groupe considéré est un sous-groupe. *L'existence de cet espace riemannien domine donc les théories auxquelles je fais allusion*, et ce n'est pas simplement par un hasard heureux que Poincaré a pu se servir du plan non euclidien pour édifier la théorie des fonctions fuchsiennes. On ne sera pas étonné d'après cela d'apprendre que l'espace riemannien fondamental de la géométrie projective réelle est l'espace des formes quadratiques définies positives, et que celui de la géométrie projective complexe est l'espace des formes d'Hermite définies positives. Je dois ajouter que dans son „Introduzione alla Teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe", M. Fubini avait déjà indiqué plusieurs des métriques riemanniennes fournies par les espaces symétriques.

VII.

C'est surtout l'Analysis situs qui est intéressé par les espaces symétriques clos, car ils fournissent une classe importante de variétés dont on peut pousser assez loin l'étude topologique.

En ce qui concerne leurs géodésiques, il en passe au moins une par deux points donnés. Pour avoir des résultats plus précis, il faut introduire le *rang* λ de l'espace: c'est le nombre maximum des transvections infinitésimales échangeables entre elles dont les géodésiques de base passent par un point donné; ces géodésiques forment une variété fermée à courbure nulle, analogue topologiquement à un tore généralisé. Une géodésique générique est contenue dans une de ces variétés et une seule, et elle passe infiniment près de tous les points de cette variété. Si $\lambda > 1$, par deux points il passe une infinité de géodésiques; si $\lambda = 1$, il en passe une et en général une seule, qui est fermée.

D'un autre point de vue, on peut obtenir les nombres de Betti de l'espace par une méthode purement algébrique ne faisant intervenir que les propriétés infinitésimales de l'espace. Cette méthode repose sur des théorèmes relatifs aux intégrales de différentielle exacte d'une variété close, dont la démonstration est due à M. G. de Rham. Elle revient à la détermination de certains invariants rationnels entiers du groupe linéaire d'isotropie; chacun d'eux donne naissance à une intégrale multiple, qui est automatiquement une intégrale de différentielle exacte; le nombre des intégrales indépendantes de degré donné est égal au nombre de Betti correspondant de l'espace.

Un cas particulièrement intéressant est celui où le groupe d'isotropie contient une transformation infinitésimale échangeable avec toutes les autres. L'espace peut alors être regardé comme *analytique complexe*. On obtient ainsi

l'espace projectif complexe;

l'espace des variétés planes à p dimensions de l'espace projectif complexe à $p + q$ dimensions;

la quadrique complexe non dégénérée;

l'espace des variétés planes à p dimensions génératrices de la quadrique complexe à $2\,p$ dimensions;

l'espace des variétés planes à p dimensions qui appartiennent à un complexe linéaire non dégénéré de l'espace à $2\,p + 1$ dimensions;

enfin deux espaces représentables par deux variétés algébriques, l'une, à 16 dimensions, du 78^e degré, plongée dans l'espace à 26 dimensions; l'autre, à 27 dimensions, du 13110^e degré, plongée dans l'espace à 55 dimensions.

Dans tous ces espaces les nombres de *Betti* d'ordre impair sont nuls, ceux d'ordre pair sont positifs et égaux au nombre de certaines représentations linéaires distinctes d'un certain groupe lié au groupe d'isotropie. Enfin il existe pour les homologies sans division une base formée de variétés algébriques. On peut ainsi retrouver, mais avec une plus grande portée, pour les deux premiers espaces indiqués, des résultats qui ont fait l'objet de nombreux travaux remontant à *Schubert*.

En ce qui concerne les autres espaces clos, ceux dont le groupe d'isotropie est simple ou semi-simple, il y aurait lieu d'appliquer la méthode indiquée. En particulier pour les espaces représentatifs des groupes simples clos, on sait que les deux premiers nombres de *Betti* sont nuls, mais que le troisième ne l'est pas; un résultat intéressant, mais isolé, est que la somme des nombres de *Betti* de l'espace est égale à 2^l, où l désigne le rang du groupe. Il y aurait intérêt à étudier de plus près cette question, d'autant plus importante que la variété d'un groupe quelconque, au moins sous sa forme simplement connexe (cycles à une dimension réductibles à un point), est le produit topologique d'un espace euclidien et d'un ou plusieurs espaces de groupes simples clos.

Enfin, dans un ordre d'idées un peu différent, tout espace riemannien symétrique clos admet une suite infinie de réalisations par des variétés sans singularité d'un espace euclidien, les transformations du groupe G de l'espace riemannien se traduisant, sur ces variétés, par des rotations autour d'un point fixe de tout l'espace euclidien ambiant (*exemple* la sphère). Chaque représentation est associée à une *suite de fonctions fondamentales* de l'espace: c'est une suite d'un nombre fini de fonctions continues subissant une substitution linéaire par toute opération du groupe de l'espace. L'ensemble des fonctions de toutes ces suites, qu'on peut obtenir par voie algébrique, constitue un système orthogonal complet de fonctions, en ce sens que toute fonction continue qui leur est orthogonale est identiquement nulle. La continuité des fonctions d'une suite fondamentale n'est même pas nécessaire à supposer; il suffit qu'elles soient bornées, leur continuité en découle: c'est là un théorème extrêmement remarquable dont la démonstration fait en partie appel à la théorie géométrique des espaces symétriques.

J'espère vous avoir montré suffisamment comment, dans la théorie des espaces symétriques, les différentes branches des Mathématiques que j'énumérais au début de cette Conférence se prêtent un mutuel appui, s'éclairant l'une l'autre; c'est à ce titre qu'elle m'a paru ne pas être indigne d'être exposée devant vous.

Bibliographie

E. Cartan and *J. A. Schouten*, On the Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism (Proc. Amsterdam, 29, 1926, p. 803—815).

E. Cartan, La géométrie des groupes de transformations (J. Math. pures et appl., 6, 1927, p. 1—119).

id., Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann (Bull. Soc. Math., 54, 1926, p. 214—264; 55, 1927, p. 114—134).

id., La géométrie des groupes simples (Annali di Mat., 4, 1927, p. 209-256; 5, 1928, p. 9—17).

id., Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (Ann. Ec. Norm., 44, 1927, p. 345—467).

id., Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne (J. Math. pures et appl., 8, 1929, p. 1—33).

id., La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs (Mém. Sc. Math., XLII, 1930).

id., Leçons sur la géométrie projective complexe (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

id., Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos (Rend. Circ. Mat. Palermo, 53, 1929, p. 217—252).

id., Sur les représentations linéaires des groupes clos (Comm. Math. helvet., 2, 1930, p. 269—283).

id., Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces (Ann. Soc. pol. Math., 8, 1929, p. 181—225).

Ehresmann, Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé (C. R., 194, 1932, p. 2004—2006).