Korollar 8.4.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, $1 \le p < \infty$. Dann liegt der Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ die Fortsetzung von u gemäss Satz 8.4.1. Nach Satz 8.2.1 gibt es $(v_k) \subset C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $v_k \to v$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Für $u_k = v_k|_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$ gilt dann $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ $(k \to \infty)$. □

Erstaunlicherweise gilt die Aussage von Korollar 8.4.1 auch für unbeschränkte Gebiete ohne weitere Annahmen an den Rand.

Korollar 8.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, $1 \le p < \infty$. Dann existiert zu jedem $u \in W^{1,p}(\Omega)$ eine Folge $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u_k|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$ $(k \to \infty)$.*

Bemerkung 8.4.1. $\partial\Omega$ muss nicht kompakt sein.

Beweis von Korollar 8.4.2. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und sei $\delta > 0$ vorgegeben.

Behauptung 1. $\exists \tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $supp(\tilde{u}) \subset\subset \mathbb{R}^n$ und $\|\tilde{u} - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta$.

Beweis. Sei $\eta \in C_c^\infty(B_2(0))$ mit $0 \le \eta \le 1$ und $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\eta_k(x) = \eta(x/k) \in C_c^\infty(B_{2k}(0))$ mit $|\nabla\eta_k| \le C/k$ und $\eta_k \to 1$ fast überall $(k \to \infty)$. Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\|\eta_k u - u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(1-\eta_k)|^p \, dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Weiter gilt $\nabla(\eta_k \cdot u) = u\nabla\eta_k + \eta_k\nabla u$. Mit

$$\|u\,|\nabla\eta_k|\,\|_{L^p} \le Ck^{-1}\|u\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

und $\|\eta_k\nabla u - \nabla u\|_{L^p} \to 0$ $(k \to \infty)$ erhalten wir

$$\|\nabla(\eta_k u) - \nabla u\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty);$$

also $\eta_k u \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Setze $\tilde{u} = \eta_k u$ für geeignetes $k = k(\delta)$. □

Da $\partial\Omega \cap supp(\tilde{u})$ kompakt, liefert das im Beweis von Satz 8.4.1 benutzte Argument eine Fortsetzung $\tilde{v} = E\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $supp(\tilde{v}) \subset\subset \mathbb{R}^n$ und den Eigenschaften i)-iii) aus Satz 8.4.1; insbesonder $\tilde{v}|_\Omega = \tilde{u}$. Glättung durch Faltung liefert eine Schar $\tilde{v}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{v} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ gemäss Lemma 7.3.3. Zum vorgegebenen $\delta > 0$ wähle $\varepsilon > 0$ mit $\|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta$. Es folgt

$$\|\tilde{v}_\varepsilon|_\Omega - u\|_{W^{1,p}} \le \|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\tilde{v}|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < 2\delta.$$

□

Steigen die Anforderungen an das Gebiet Ω, wenn wir Funktionen in $W^{k,p}(\Omega)$ für ein $k > 1$ durch Funktionen in $C^\infty(\bar{\Omega})$ approximieren wollen?

Satz 8.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und von der Klasse C^1 mit kompaktem Rand $\partial\Omega = \Gamma$. Dann liegt der Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $1 \le p < \infty$.*

Bemerkung 8.4.2. $\Omega \in C^1$ genügt für jedes k! Wir können jedoch nicht gleich argumentieren wie im Beweis der Korollare 8.4.1 und 8.4.2.

Beweis von Satz 8.4.2. Da $\Omega \in C^1$, gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \Gamma$ Koordinaten und einen Zylinder $U = Q_r = B_r(0; \mathbb{R}^{n-1}) \times]-r, r[$ um $x_0 = 0$, so dass $U \cap \Gamma$ Graph einer C^1-Funktion ψ über dem Tangentialraum $T_{x_0}\Gamma = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ an Γ im Punkt x_0 ist und mit

$$U \cap \Omega = \{(x', x_n);\ |x'| < r,\ \psi(x') < x_n < r\}.$$

Zudem können wir annehmen, dass

$$\nu(x) \cdot \nu(x_0) \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in \Gamma \cap U, \tag{8.4.2}$$

wobei $\nu(x)$ die äussere Normale an Ω bezeichnet, mit $\nu(x_0) = -e_n$.

Überdecke Γ mit endlich vielen derartigen Umgebungen $U_1, ..., U_L$ um Punkte $x_l \in \Gamma$, $1 \leq l \leq L$, und wähle $U_0 \subset \Omega$ offen mit $\Omega \subset \cup_{l=0}^{L} U_l$ wie im Beweis von Satz 8.4.1. Weiter sei $(\varphi_l)_{0 \leq l \leq L}$ eine Zerlegung der Eins auf Ω bezüglich $(U_l)_{0 \leq l \leq L}$, und sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Zerlege $u = \sum\limits_{l=0}^{L} u_l$ mit $u_l = u\varphi_l \in W^{k,p}(\Omega)$ für jedes l. Wir konstruieren glatte Näherungen für u_l, $0 \leq l \leq L$. Sei dazu $0 \leq \rho \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, dx = 1$ ein Standard-Mollifier, und skaliere $\rho_\delta(x) = \delta^{-n}\rho(x/\delta) \in C_c^\infty(B_\delta(0))$, $\delta > 0$.

$l = 0$: Da $K_0 := supp(u_0) \subset supp(\varphi_0) \subset U_0 \subset \Omega$ mit $\delta_0 := dist(K_0, \partial\Omega) > 0$, gilt für $0 < \delta < \delta_0$ die Beziehung

$$v_0^\delta = \rho_\delta * u_0 \in C_c^\infty(\Omega), \text{ und } \|v_0^\delta - u_0\|_{W^{k,p}} \to 0 \quad (\delta \downarrow 0)$$

analog zum Beweis von Satz 8.2.1.

$l \geq 1$: Wähle Koordinaten mit $x_l = 0$ und $U_l = Q_{r_l}$ wie oben. Es gilt

$$K_l := supp(u_l) \subset supp(\varphi_l) \subset\subset U_l$$

mit $\delta_l := dist(K_l, \partial U_l) > 0$. Mit (8.4.2) erhalten wir für $x \in U_l \cap \Omega$ und $\varepsilon > 0$ mit $x + \varepsilon e_n \in K_l$ die Abschätzung $dist(x + \varepsilon e_n, U_l \cap \Gamma) \geq \varepsilon/2$.

Für $\varepsilon > 0$ setze $v_l^\varepsilon = u_l \circ T_\varepsilon \in W^{k,p}(U_l \cap \Omega)$, wobei T_ε die Verschiebung

$$T_\varepsilon \colon U_l \cap \Omega \ni x \mapsto x + \varepsilon e_n \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet.

Behauptung 1. Es gilt $v_l^\varepsilon \in W^{k,p}(U_l \cap \Omega)$ mit $\partial^\alpha v_l^\varepsilon = (\partial^\alpha u_l) \circ T_\varepsilon \in L^p$ für alle $|\alpha| \leq k$, und $\|v_l^\varepsilon - u_l\|_{W^{k,p}(U_l \cap \Omega)} \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(U_l \cap \Omega)$, $|\alpha| \leq k$. Für $\varepsilon > 0$ gilt nach geeigneter Substitution

$$\begin{aligned}
\int_{U_l \cap \Omega} \big((\partial^\alpha u_l) \circ T_\varepsilon\big)\varphi\, dx &= \int_\Omega \partial^\alpha u_l (\varphi \circ T_\varepsilon^{-1})\, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_l \partial^\alpha (\varphi \circ T_\varepsilon^{-1})\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_l \big((\partial^\alpha \varphi) \circ T_\varepsilon^{-1}\big)\, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \big(u_l \circ T_\varepsilon\big) \partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{U_l \cap \Omega} v_l^\varepsilon \partial^\alpha \varphi\, dx.
\end{aligned}$$

Da weiter für $f \in C^0(U_l \cap \overline{\Omega})$ gilt $\|f \circ T_\varepsilon - f\|_{L^p(U_l \cap \Omega)} \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$, und da jedes $\partial^\alpha u_l$, $|\alpha| \le k$, durch Funktionen $(f^\alpha_{lm})_{m\in\mathbb{N}} \subset C^0(U_l \cap \overline{\Omega})$ in $L^p(U_l \cap \Omega)$ approximiert werden kann, folgt die Behauptung. □

Beachte, dass für jedes $\varepsilon > 0$ zur Definition von v_l^ε nur die Definition von u an Punkten $x \in K_l$ benutzt wird, wo $dist(x, U_l \cap \Gamma)) \ge \varepsilon/2$. Für $\varepsilon \le 2\delta_l$ können wir daher wie im Falle $l = 0$ durch Faltung glätten.

Für $0 < \delta < \varepsilon/2 \le \delta_l$ setze $v_l^{\delta,\varepsilon} = \rho_\delta * v_l^\varepsilon \in C^\infty(U_l \cap \overline{\Omega})$. Wie in Lemma 7.3.3 folgt $\|v_l^{\delta,\varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{L^p(U_l\cap\Omega)} \to 0$ $(\delta \to 0)$. Analog erhalten wir für jedes $|\alpha| \le k$ für $\partial^\alpha v_l^{\delta,\varepsilon} = \rho_\delta * \partial^\alpha v_l^\varepsilon$ die Konvergenz

$$\|\partial^\alpha v_l^{\delta,\varepsilon} - \partial^\alpha v_l^\varepsilon\|_{L^p(U_l\cap\Omega)} \to 0 \quad (\delta \to 0);$$

also $\|v_l^{\delta,\varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)} \to 0$ $(\delta \to 0)$.

Zu vorgegebenem $\gamma > 0$ gibt es also $0 < \delta < \varepsilon/2 \le \delta_l$ mit

$$\|v_l^{\delta,\varepsilon} - u_l\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)} \le \|v_l^{\delta,\varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)} + \|v_l^\varepsilon - u_l\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)} < \gamma.$$

Die Behauptung des Satzes folgt. □

Bemerkung 8.4.3. i) Allgemeiner genügt für die Aussage des Satz 8.4.2, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit kompaktem Rand $\partial\Omega$ die Segmenteigenschaft besitzt; vergleiche Adams: "Sobolev spaces", S. 66.

ii) Es lassen sich sogar für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und $1 < p < \infty$ Funktionen $u \in W^{k,p}(\Omega)$ analog zu Satz 8.4.1 fortsetzen, sofern $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit kompaktem Rand $\partial\Omega$ nur eine gleichmässige Kegelbedingung erfüllt; siehe Adams, Satz 4.32. Dies ist insbesondere bei Gebieten $\Omega \in C^1$ mit kompaktem Rand der Fall. Der Beweis dieses auf Calderòn zurückgehenden Fortsetzungssatzes benutzt die Calderòn-Zygmund Abschätzung aus der Theorie der singulären Integraloperatoren, was die Einschränkung $1 < p < \infty$ erklärt.

Wie kann man für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sinnvoll die "Spur" $u|_{\partial\Omega}$ erklären?

Lemma 8.4.2. *Sei $u \in W^{1,p}(Q_+)$, $1 \le p \le \infty$. Dann ist $u|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$ wohldefiniert, und der „Spuroperator"*

$$W^{1,p}(Q_+) \ni u \mapsto u|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$$

ist linear und stetig.

Beweis. i) Sei $u \in C^1(Q)$. Für $x' \in Q_0$ gilt

$$u(x', 0) = u(x', x_n) - \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s)\, ds.$$

Nach Mittelung bzgl. x_n erhalten wir die Abschätzung

$$|u(x', 0)| \le \int_0^1 |u(x', x_n)|\, dx_n + \int_0^1 |\nabla u(x', s)|\, ds.$$