Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

Herbstsemester 2020

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 2

Aufgabe 2.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

2.1a) Ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit A orthogonal (d. h. $AA^T = A^T A = I_n$) ist für beliebige rechte Seiten b eindeutig lösbar.

(i) richtig (ii) falsch

2.1b) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5, \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3, \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Führt man den ersten Gauss-Schritt mit Pivot in der Zeile 1 aus, so erhält man die folgende augmentierte (oder erweiterte) Matrix:

(i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array}\right)$

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right)$

(iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right)$

(iv) Keine der obigen drei Matrizen stellt die augmentierte Matrix nach dem ersten Gauss-Schritt dar.

Jemand erhält als Resultat der Gausselimination die augmentierte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a(1-a) & b(1-a) \end{array}\right).$$

2.1c) Wenn $b = 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

2.1d) Wenn $a \neq 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

2.1e) Wenn $a = 2$ und $b = 1$, dann ist $(2.5, -0.5, -0.5)^\top$ die einzige Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

2.1f) Wenn $a = 1$, dann ist die Lösungsmenge $\{(1, \lambda, -\lambda)^\top : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

Aufgabe 2.2

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2.2a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

$AB,\ BA,\ Ax,\ A^2 := AA,\ B^2,\ BB^\top,\ B^\top B,\ y^\top x,\ yx,\ xy^\top,\ B^\top y,\ y^\top B.$

2.2b) Lösen Sie 2.2a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

2.2c) Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

wobei $\phi = \pi/3$. Zeichnen Sie das Dreieck mit den Ecken a, b, c. Wenden Sie die Matrix R auf die Vektoren an und zeichnen Sie auch das entsprechende neue Dreieck. Was bedeutet das Anwenden von R geometrisch?

Hinweis: Ergänzen Sie dazu das MATLAB-Skript `s2a2.m`, das Sie zusammen mit der MATLAB-Funktion `plot_dreieck.m` auf der Vorlesungshomepage finden.

Aufgabe 2.3

2.3a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -6x_1 & + & 4x_2 & + & 14x_3 & = & -2 \end{array}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschung (Gauss-Elimination).

2.3b) Lösen Sie das Gleichungssystem in Teilaufgabe 2.3a) nochmals mit Hilfe von MATLAB. Zuerst direkt mittels der Operation '\', dann mittels LR-Zerlegung '`lu`', also '`[L,R,P] = lu(A)`', und der Operation '\'.

Aufgabe 2.4

2.4a) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(AB)^T$, $A^T B^T$ und $B^T A^T$.

2.4b) Zeigen Sie, dass für *beliebige* quadratische Matrizen C gilt, dass $C + C^T$ symmetrisch ist.

Aufgabe 2.5

2.5a) Bestimmen Sie die 3×3-Matrizen, die beim Anwenden (von links) auf eine 3×3-Matrix A Folgendes bewirken:

(i) E_{21}: subtrahiert dreimal die erste Zeile von der zweiten;

(ii) E_{31}: addiert zweimal die erste Zeile zur dritten;

(iii) E_{32}: subtrahiert einmal die zweite Zeile von der dritten;

(iv) P: vertauscht die zweite und die dritte Zeile.

2.5b) Seien A und R die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie Matrizen M_1, M_2 und M_3, so dass

$$M_1 M_2 M_3 A = R,$$

wobei M_1, M_2 und M_3 Matrizen aus Teilaufgabe 2.5a) sind.

Abgabe:

In der Woche vom 5. Oktober 2020 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte geben Sie dem zugeteilten Assistenten die Matlab Aufgaben ausgedruckt ab und reichen Sie diese auch Online ein, wie auf der Webpage beschrieben.