Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 4

Aufgabe 4.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.1a) Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(i) A_1 ist nicht orthogonal.

(ii) A_2 ist nicht orthogonal, aber die inverse A_2^{-1} ist es.

4.1b) Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^T A$ die Einheitsmatrix I_n ist. Dann gilt:

(i) A ist orthogonal und $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Aufgabe 4.2

Multiple Choice: Online abzugeben.

Gegeben sei die orthogonale Matrix

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & d \\ e & 0 & f \end{bmatrix}.$$

4.2a) Welche der folgenden Werte sind möglich?

(i) $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $e = \frac{1}{3}$ (iii) $e = 0$ (iv) $e = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4.2b) Welche der folgenden Wertepaare sind möglich?

(i) $a = 1, c = -1$ (ii) $a = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ (iii) $a = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$ (iv) Keine dieser

4.2c) Wie viele mögliche Parameterkombinationen gibt es für B?

(i) 0 (iii) 2 (v) 6 (vii) 16

(ii) 1 (iv) 4 (vi) 8 (viii) Unendliche

4.2d) Welche der folgenden Werte sind möglich?

(i) $f = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $f = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (iii) $f = \frac{2}{\sqrt{6}}$ (iv) $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 4.3

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.3a) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

(i) A, B, C und D sind Givens-Rotationen.

(ii) A, B und C sind Givens-Rotationen, nicht aber D.

(iii) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Uhrzeigersinn.

(iv) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Gegenuhrzeigersinn.

(v) Matrix B entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(1)}$-Achse, wobei $e^{(1)} = (1, 0, 0)^T$.

(vi) Matrix C entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(2)}$-Achse im Gegenuhrzeigersinn von der positiven $e^{(2)}$-Achse aus betrachtet.

(vii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(2)}$-Ebene.

(viii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene.

Aufgabe 4.4 Householdertransformation

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, die den Nullpunkt enthält. Man kann dann durch einen Normalenvektor v, der orthogonal zur Hyperebene Σ ist, die Spiegelung an der Hyperebene Σ beschreiben. Ist v als Spaltenvektor gegeben und I die n-dimensionale Einheitsmatrix, dann wird die entsprechende lineare Abbildung durch die folgende Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt:

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T.$$

4.4a) Beweisen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $(vv^T)^T = vv^T$.

4.4b) Beweisen Sie, dass H eine Orthogonalmatrix ist.

4.4c) Beweisen Sie, dass $H^2 = I$ gilt.

Aufgabe 4.5 Orthogonale Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & u & x \\ \frac{2}{3} & v & y \\ \frac{1}{3} & 0 & z \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $u, v, x, y, z \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A orthogonal wird. Geben Sie alle vier Möglichkeiten an.

Aufgabe 4.6

Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Geben Sie die Matrizen Q und R einer QR-Zerlegung von A an.

Aufgabe 4.7

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix Q_{21} und eine Spiegelungsmatrix H_1, so dass

$$Q_{21}A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei R_1 und R_2 Rechtsdreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix Q_i und eine Rechtsdreiecksmatrix R_i an, so dass $A = Q_i R_i$.

Abgabe:

In der Woche vom 19. Oktober 2020 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte geben Sie dem zugeteilten Assistenten die Matlab Aufgaben ausgedruckt ab und reichen Sie diese auch Online ein, wie auf der Webseite beschrieben.