Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 7

Aufgabe 7.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

7.1a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

(i) $\mathcal{F} : x \mapsto ax + b$ mit $x, a, b \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

(iii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(iv) $\mathcal{F} : x \mapsto x^2 + 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

(v) $\mathcal{F} : x \mapsto \exp(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

(vi) $\mathcal{F}$ nimmt eine Funktion f aus der Menge der stetigen Funktion von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, notiert als $\mathcal{C}([0,1])$, und gibt die Funktion $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ in $\mathcal{C}([0,1])$ zurck.

7.1b) Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_2 = x_3$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ senkrecht auf E projiziert. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(ii) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7.1c) Gegeben ist ein Autokonstruktionsroboter, welcher immer die gleiche Drehung mit einem Stoss durchfhrt, um ein Element in die Karosserie einzufgen. Die dazugehrige lineare Abbildung ist $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ auf $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ abbildet. Nun, der Roboter operiert nicht bezglich unserer Standardbasis, sondern bezglich der Basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\sqrt{2}\begin{bmatrix} -6.5 & -65 & -12.5 \\ 1.5 & 14 & 2.5 \\ -3.5 & -32 & -5.5 \end{bmatrix}$.

(ii) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\sqrt{2}\begin{bmatrix} -16.5 & -7.5 & 17.5 \\ -14.5 & -5.5 & 14.5 \\ -23 & -10 & 24 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 7.2 Koordinatentransformation

Gegeben seien die zwei Basen $\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

7.2a) Finden Sie die Basiswechselmatrix S, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Tatsache, dass die Spalten der Basiswechselmatrix die Koordinaten der “alten Basis” $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der “neuen Basis” $\mathcal{B}$ enthalten. Hier müssen Sie lineare Gleichungssysteme lösen, um diese Koordinaten zu bestimmen.

7.2b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 7.3 Koordinatentransformation zur geometrischen Interpretation

Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V nach V.

7.3a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation, welche neue Koordinaten in alte überführt.

7.3b) Durch welche Matrix $\tilde{A}$ wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten (in $W = \mathbb{R}^3$ mit der neuen Basis in W) beschrieben?

7.3c) Interpretieren Sie die Abbildung in den ursprünglichen Koordinaten (in V) geometrisch.

Aufgabe 7.4 Matrixdarstellung einer linearen Polynomabbildung

Seien $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{1, t^2, t^4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_2$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathcal{U}_2 \\ & x & \longmapsto & tx'' \end{array}$$

7.4a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

7.4b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

7.4c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_2$ sind, wobei $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 1 - t^2$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$, $q_1(t) = t$ und $q_2(t) = 3t + 2t^3$.

7.4d) Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{A}$ nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in Teilaufgabe 7.4c) gegeben) beschreibt?

Aufgabe 7.5

Die drei linearen längenerhaltenden Selbstabbildungen F_1, F_2 und F_3 des $\mathbb{R}^3$ sind wie folgt definiert:

F_1 ist eine Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$.
F_2 ist eine 45°-Drehung um die x_1-Achse.
F_3 ist eine 30°-Drehung um die x_2-Achse.

7.5a) Finden Sie die Matrixdarstellungen der linearen Abbildungen $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2$ and F_3 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

7.5b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der hintereinandergeschalteten Abbildungen $\mathsf{F}_2 \circ \mathsf{F}_1$ und $\mathsf{F}_3 \circ \mathsf{F}_2$.

Aufgabe 7.6

Seien X und Y zwei lineare Rume und $F: \ X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

7.6a) F ist injektiv, dann und nur dann, wenn $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$.

7.6b) Falls X und Y endlichdimensional sind, dann ist F bijektiv dann und nur dann wenn die Abbildungsmatrix von F (zu Basen in X und Y) eine invertierbare Matrix ist.

Abgabe:

In der Woche vom 09. November 2020 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webseite beschrieben.