Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

Herbstsemester 2020

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 8

Aufgabe 8.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

8.1a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ auf $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ der Vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(i) richtig

(ii) falsch

8.1b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

(i) richtig

(ii) falsch

8.1c) Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(i) richtig

(ii) falsch

8.1d) Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$.

(i) richtig

(ii) falsch

8.1e) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

(i) richtig

(ii) falsch

8.1f) In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

(i) richtig

(ii) falsch

Aufgabe 8.2 Polynomielle Projektion

In dieser Aufgabe betrachten wir den Polynomraum $\mathcal{P}_{d+1}([-1,1])$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich d auf dem Interval $[-1,1]$ für $d \in \mathbb{N}$. Er ist ausgestattet mit dem *Skalarprodukt*

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{P}_{d+1}([-1,1]),$$

und der *Monombasis*

$$\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \ldots, t \mapsto t^d\}.$$

Weiter seien die linearen Abbildungen $\mathcal{L}_{d+1} : \mathcal{P}_{d+1}([-1,1]) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathcal{L}_{d+1}(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}_{d+1}([-1,1]).$$

Schliesslich sind die ersten drei der sogenannten *Legendre-Polynome* gegeben durch

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1).$$

Wir betrachten nun Konzepte, wie sie im Zusammenhang mit der Diskussion linearer Abbildungen in der Vorlesung besprochen worden sind, für diesen Polynomraum.

8.2a) Geben Sie die Matrixdarstellung L von $\mathcal{L}_3$ bezüglich der monomialen Basis von $\mathcal{P}_3([-1,1])$ und der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ an.

8.2b) Zeigen Sie, dass $\langle P_i, P_i \rangle = 1$ fr $i = \{1,2,3\}$ und $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ fr $i \neq j$.

8.2c) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung $\tilde{L}$ von $\mathcal{L}_3$ bezüglich der Basis $\{P_0, P_1, P_2\}$ von $\mathcal{P}_3([-1,1])$ und der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

8.2d) Der *Rang* einer linearen Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W ist definiert als die Dimension ihres Bildes $f(V)$ als Unterraum von W (siehe Vorlesung). Er entspricht dem Rang jeder zugehörigen Abbildungsmatrix. Was ist für allgemeines d der Rang von $\mathcal{L}_{d+1}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

8.2e) Zeigen Sie, dass für $d \geq 2$

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \{t \mapsto 1 - t^2, t \mapsto t(1-t^2), t \mapsto t^2(1-t^2), \ldots, t \mapsto t^{d-2}(1-t^2)\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{d+1})$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\dim \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{d+1})$ mithilfe der Dimensionsformel und Teilaufgabe 8.2d). Zeigen Sie dann, dass $\mathcal{B}_{\text{Kern}}$ im Kern enthalten und linear unabhängig ist.

8.2f) Berechnen Sie für die Vektoren $t \mapsto t^n \in \mathcal{P}_{d+1}([-1,1])$, $n \in \{0, 1, \ldots, d\}$, die jeweiligen Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{P}_3([-1,1])$, also diejenigen Polynome in $\mathcal{P}_3([-1,1])$, deren Differenz zum ursprnglichen Polynom senkrecht zu $\mathcal{P}_3([-1,1])$, bezglichen dem obigen Skalarprodukt, steht.

Hinweis: Verwenden Sie, dass sich die Orthogonalprojektion wegen dem Resultat aus Teilaufgabe 8.2b) leicht berechnen lassen.

Aufgabe 8.3

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \operatorname{diag}(4, \frac{1}{9})$. Wir definieren $(x, y) := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

8.3a) Zeigen Sie, dass (x, y) in V ein Skalarprodukt definiert.

8.3b) Wie sieht die durch (x, y) induzierte Norm $\|x\|$ aus?

8.3c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

8.3d) Geben Sie den algebraischen Ausdruck und skizzieren Sie den Ball mit Radius 1 bezueglich dieser Norm.

8.3e) Finden Sie einen normierten Vektor, der orthogonal auf $x = [-1/2, 3]^\top$ steht.

Aufgabe 8.4

8.4a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bezüglich des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

8.4b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

bezüglich der in Teilaufgabe 8.4a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, das heisst, es soll gelten

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

8.4c) Lösen Sie Teilaufgabe 8.4a) mit Hilfe der QR-Zerlegung in MATLAB.

Hinweis: In MATLAB liefert der Befehl `[Q,R] = qr(A)` die QR–Zerlegung der Matrix `A`.

8.4d) Berechnen Sie die Projektion von v auf $\mathrm{span}(a^{(1)}, a^{(2)})$.

Abgabe:

In der Woche vom 16. November 2020 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webseite beschrieben.