Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 9

Aufgabe 9.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

9.1a) Sei die QR-Zerlegung der $m \times n$-Matrix A, $m > n$, gegeben mit Q orthogonal und $R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$, wobei $0_{(m-n)\times n}$ eine Null-Matrix bezeichne. Die Spalten von A seien linear abhängig, dann ist die $n \times n$-Matrix R_0

(i) singulär.

(ii) regulär.

(iii) nicht eindeutig regulär, oder singulär.

9.1b) Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalengleichungen

(i) genau eine Lösung.

(ii) unendlich viele Lösungen.

(iii) keine Lösung.

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

x_i	0	1	2
y_i	5.41	5.17	5.93

.

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung,

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2,$$

minimal wird (lineare Regression).

9.1c) Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

9.1d) Die Matrix der Normalengleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{bmatrix}$

9.1e) Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

(i) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$ (iii) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

(ii) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

Aufgabe 9.2

Multiple Choice: Online abzugeben.

9.2a) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

9.2b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

9.2c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

(i) $\det M \neq 0$, (ii) $\det M = 0$, (iii) $\det M = \pm 1$.

9.2d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

9.2e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$, (ii) $\det A = \alpha + 2$, (iii) $\det A = -\alpha - 2$.

9.2f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 9.2e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

(i) die leere Menge,

(ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4$,

(iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9.3

Sei $V = \mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome auf dem Intervall $[0, 1]$ vom Grad strikt kleiner als 3. Auf V ist durch

$$\big\langle p_1(x), p_2(x) \big\rangle := \int_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt gegeben. Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von V, indem Sie das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren $1, x, x^2$ anwenden.

Aufgabe 9.4

Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und $\alpha_n,\ \beta_m > 0$ im Vektorraum $V = C^0([0, 2\pi])$, den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$$

ausstatten.

9.4a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene dieser Funktionen orthogonal sind.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned} \sin(u)\ \sin(v) &= \tfrac{1}{2}(\cos(u - v) - \cos(u + v)) \\ \cos(u)\ \cos(v) &= \tfrac{1}{2}(\cos(u - v) + \cos(u + v)) \\ \sin(u)\ \cos(v) &= \tfrac{1}{2}(\sin(u - v) + \sin(u + v)) \end{aligned}$$

9.4b) Wie sind α_n und β_m zu wählen, damit alle diese Funktionen die Norm 1 haben?

Definition: Vektorprodukt *Seien die zwei Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$, $w = (w_1, w_2, w_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ gegeben, so definieren wir das Vektorprodukt $v \times w \in \mathbb{R}^3$ als*

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

Betrachten sie dazu auch die Lektüre zur Vektorrechnung von Daniel Stoffer auf der Webpage.

Aufgabe 9.5

9.5a) Berechnen Sie

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

9.5b) Bestimmen Sie mit dem Vektorprodukt einen Normalenvektor der Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(-1, 2, 3),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimmen Sie ausserdem Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}.$$

Aufgabe 9.6

9.6a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}$ mit der Geraden $g = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (-2, 1, 3) + \lambda(1, 1, 1)\,, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

9.6b) Geben Sie einen möglichst einfachen Punkt P an, der sowohl auf E_1 als auch auf E_2 liegt, wobei $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

9.6c) Geben Sie mit Hilfe des Vektorprodukts die Richtung der Schnittgeraden von E_1 und E_2 an.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Normalenvektoren von E_1 und E_2.

Aufgabe 9.7

9.7a) Berechnen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts die orthogonale Projektion Q des Punktes $P = (-2, 4, 3)$ auf die Gerade $g = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + \lambda(2, 2, 1)\}$.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze: Auf welchem Vektor muss $\vec{PQ}$ senkrecht stehen?

Aufgabe 9.8 Orthonormale Basis

Gegeben seien die Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, das heisst, zeigen Sie, dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind (das bedeutet, dass ihre Länge 1 ist, i.e. $\sqrt{\langle v^{(i)}, v^{(i)}\rangle} = 1$, $i = 1, 2, 3$),
- paarweise orthogonal sind

- und eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Abgabe:

In der Woche vom 23. November 2020 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webseite beschrieben.