Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

Herbstsemester 2020

ETH Zürich
D-MATH

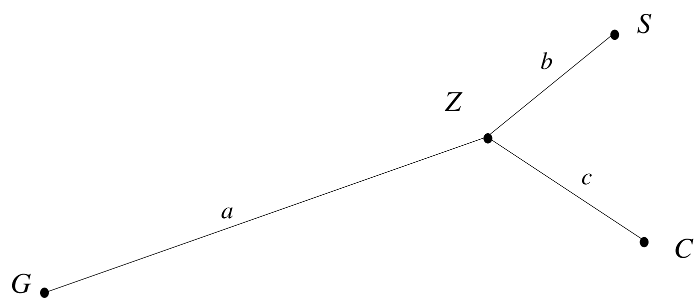
Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 10

Aufgabe 10.1

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht.

10.1a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalengleichungen.

10.1b) Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in MATLAB.

10.1c) Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\'-Operator in MATLAB.

Aufgabe 10.2

Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 10.3

Die Runge-Funktion ist definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5, 5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Wir fordern, dass P_n die Funktion f an m gleichmässig in $[-5, 5]$ verteilten Punkten x_i möglichst gut approximiert und schreiben dies als lineares Ausgleichsproblem der Form

$$Ac = b, \tag{10.3.1}$$

wobei c die $n + 1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

10.3a) Bestimmen Sie die Matrix A und die rechte Seite b.

10.3b) Wie können Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung von A lösen? Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen.

10.3c) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `runge_lstsq.m`, die die Lösung des Ausgleichsproblems (10.3.1) für beliebige m und n mit $m \geq n + 1$ berechnet. Plotten Sie anschliessend mithilfe der Funktion `runge_diff_degrees.m` die Lösung für Grad $2 \leq n \leq 13$ und $m = 20$.

Aufgabe 10.4

10.4a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, das heisst, bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

10.4b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10.4c) Überprüfen Sie Ihr Resultat von Teilaufgaben 10.4a) und 10.4b) in MATLAB.

Hinweis: `[V,D] = eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix `C` in der Diagonalen von `D` und zugehörige Eigenvektoren in den Spalten von `V` zurück.

Aufgabe 10.5

Sei A die 3×3-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.5a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der MATLAB Funktion `eig`.

10.5b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

10.5c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x Folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 10.6

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.6a) Diagonalisieren Sie die Matrix, das heisst, bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

10.6b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $\dot{z} = az$ ist gegeben durch $z(t) = ce^{at}$ mit einer Konstanten c. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = ce^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z_0 = z(0) = c$ bestimmt werden kann.

10.6c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10.6d) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Abgabe:

In der Woche vom 30. November 2020 beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webseite beschrieben..