Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 11

Aufgabe 11.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

11.1a) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ definiere eine Abbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, z \mapsto Az$. Dann gilt:

(i) A hat drei paarweise verschiedene Eigenwerte.

(ii) A hat keine Basis von Eigenvektoren.

(iii) Die geometrische Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes von A ist 2.

(iv) Die algebraische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 1.

(v) Die Menge der Eigenwerte von A und A^T ist gleich.

11.1b) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige quadratische Matrizen A und B richtig?

(i) Ist A diagonalisierbar und invertierbar, so auch A^{-1}.

(ii) Ist A diagonalisierbar, so auch $A^\top$.

(iii) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch $A + B$ diagonalisierbar.

(iv) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch AB diagonalisierbar.

(v) Ist A diagonalisierbar, so auch A^2.

(vi) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat n verschiedene Eigenwerte, so gilt dies auch für A^2.

Aufgabe 11.2

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.2a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A.

11.2b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu A.

11.2c) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A^4.

Aufgabe 11.3

11.3a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11.3b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

11.3c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

11.3d) Prüfen Sie Teilaufgaben 11.3b) und 11.3c) mit MATLAB nach.

Hinweis: Beachten Sie den Unterschied zwischen den Funktionen `exp` und `expm`.

Aufgabe 11.4

11.4a) Geben Sie eine kurze Begründung, weshalb jede der folgenden Aussagen wahr ist:

(i) Jede positiv definite Matrix ist invertierbar.

(ii) Die einzige positiv definite Projektionsmatrix ist $P = I$ (die Einheitsmatrix). (Eine Projektionsmatrix ist definiert als eine quadratische Matrix, für welche $P^2 = P$.)

(iii) Eine diagonale Matrix mit positiven Diagonaleinträgen ist positiv definit.

(iv) Eine symmetrische Matrix mit positiver Determinante ist nicht unbedingt positiv definit.

11.4b) Testen Sie die folgenden Matrizen A und B auf positive Definitheit:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & b \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

11.4c) Finden Sie die (symmetrische) 3×3 Matrix A, sowie deren Pivotelemente, den Rang, die Eigenwerte und die Determinante, so dass gilt:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4(x_1 - x_2 + 2x_3)^2.$$

11.4d) Welche symmetrischen 3×3 Matrizen ergeben die folgenden quadratischen Formen?

(i)

$$x^T A x = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3)$$

Wieso ist A positiv definit?

(ii)

$$x^T B x = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3)$$

Wieso ist B positiv semidefinit?

Aufgabe 11.5 Fourier-Matrizen

Die Tatsache, dass selbst reelle Polynome komplexe Nullstellen haben können, zwingt uns dazu, im Zusammenhang mit der Diagonalisierung von Matrizen in $\mathbb{C}$ zu rechnen. Das ist auch einer der tieferen Gründe für die grosse Bedeutung komplexer Zahlen in Wissenschaft und Technik. Machen Sie also nicht Ihren Mathematikprofessor dafür verantwortlich, dass Sie sich mit komplexen Zahlen herumschlagen müssen, sondern die Weigerung mancher reeller Polynome, ausschliesslich reelle Nullstellen zu haben.

Eine sehr wichtige Familie komplexer Matrizen sind die *Fouriermatrizen* $F^n = (F^n_{kl})^n_{k,l=1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$F^n_{kl} := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(k-1)(l-1)\right) , \quad 1 \leq k, l \leq n \ .$$

Dabei bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$).

11.5a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$F_n^H F_n = n \cdot I_n \ ,$$

wobei das hochgestellte H die komplex konjugierte Transponierte einer Matrix bezeichnet (die *hermitesch Transponierte*).

Hinweis: Aus der Analysis sollten die folgenden Rechenregeln für die komplexe Exponentialfunktion bekannt sein:

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i k) &= 1 \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z} \ , \\ \exp(kz) &= (\exp(z))^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C} \ , \\ \overline{\exp(z)} &= \exp(\overline{z}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \ . \end{aligned}$$

Erinnern Sie sich ausserdem an die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{für alle } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

11.5b) Mit welcher komplexen Zahl muss man F_n multiplizieren, um eine *unitäre* Matrix zu erhalten?

11.5c) Es bezeichne $e^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ den k-ten Einheitsvektor. Die *zyklische Permutationsmatrix* $P_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert durch

$$P_n = [e^{(2)}, e^{(3)}, \dots, e^{(n-1)}, e^{(n)}, e^{(1)}] \; .$$

Zeigen Sie, dass diese Matrix durch die Fouriermatrix diagonalisiert wird, dass es also eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so gibt, dass

$$P_n F_n = F_n D \; .$$

Bestimmen Sie auch die Diagonaleinträge von D.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $AS = SD$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, genau dann wenn die Spalten s^l, $l = 1, \dots, n$, von S erfüllen, dass

$$As^l = \lambda_l s^l \; , \quad l = 1, \dots, n \; .$$

Aufgabe 11.6 Orthogonalität von Eigenvektoren normaler Matrizen

Satz 7.4 im Buch garantiert die lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die zu *verschiedenen Eigenwerten* von A gehören. Für eine spezielle Klasse von Matrizen, nämlich die *normalen* Matrizen, kann man eine viel stärkere Aussage einfach beweisen, nämlich den folgenden Satz:

Satz. Erfüllt die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Bedingung

$$AA^H = A^H A \; , \tag{11.6.1}$$

ist sie also vertauschbar mit ihrer konjugiert Transponierten A^H, so sind jeweils zwei Eigenvektoren, die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehören, *orthogonal*.

Beachten Sie, dass wir in dieser Aufgabe konsequent mit komplexen Matrizen und Vektoren rechnen.

11.6a) Zeigen Sie, dass für eine Matrix, die (11.6.1) erfüllt, gilt:

$$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{Kern}(A^H) \; .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Rechenregeln für das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$.

11.6b) Zeigen Sie, dass aus der Eigenschaft (11.6.1) der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ folgt:

$$(A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^H = (A - \lambda I_n)^H (A - \lambda I_n) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} \; .$$

Hinweis: Für komplexe Matrizen gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle Matrizen.

11.6c) Beweisen Sie, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von A^H ist und umgekehrt.

Hinweis: Aus der Definition von Eigenvektoren wissen wir, dass sie Elemente des Kerns von bestimmten Matrizen sind. Diese Matrizen sind uns bereits in der vorherigen Teilaufgabe begegnet. Geht Ihnen ein Licht auf? Teilaufgabe 11.6a)!

11.6d) Beweisen Sie nun den obigen Satz unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe 11.6c).

Hinweis: Orthogonalität von zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 bedeutet: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Wir wissen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es genügt also, $\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$ zu zeigen.

Freiwillige Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe ist vollkommen *freiwillig* zu lösen. Sie ist ausschliesslich für diejenigen gedacht, die sich weitere Übungsaufgaben wünschen.

Aufgabe 11.7 Lineare Rekursion: Das Räuber-Beute-Modell

Eine Anwendung linearer Rekursionen ist die Vorhersage der dynamischen Entwicklung der Altersstruktur einer Population. Darüber hinaus sind lineare Rekursionen sehr wichtig für die mathematische Modellierung von Populationsdynamik, denn die natürlichen Rhythmen von Tag und Nacht und Jahreszeiten legen eine Entwicklung in Zeitschritten nahe.

Um qualitative und quantitative Vorhersagen aus solchen Modellen zu treffen, ist die Diagonalisierung der Rekursionsmatrix das entscheidende Hilfsmittel. Dieses Werkzeug stellt die lineare Algebra bereit.

Wir betrachten ein zeitdiskretes Räuber-Beute-Modell, welches repräsentiert wird durch die parameterabhängigen Rekursionsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{3}{5}p_k + \frac{1}{5}q_k\,, \\ q_{k+1} &= -\alpha p_k + \frac{6}{5}q_k\,, \end{aligned}\right\} \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{11.7.1}$$

wobei p_k die Population der Räuber und q_k die Population der Beute zum Zeitpunkt t_k darstellt, und in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\alpha \in [0, 1]$. Offensichtlich impliziert das Modell (11.7.1)

- ein exponentielles Wachstum der Beutepopulation, wenn keine Räuber vorhanden sind (Koeffizient $\frac{6}{5}$),
- eine exponentielle Abnahme der Räuberpopulation, falls es keine Beutetiere gibt (Koeffizient $\frac{3}{5}$),
- ein reduziertes Wachstum oder sogar ein Schrumpfen der Beutepopulation in Gegenwart von vielen Räubern (Koeffizient $-\alpha$),
- eine weniger starke Abnahme oder sogar eine Zunahme der Räuberpopopulation, wenn viele Beutetiere vorhanden sind (Koeffizient $\frac{3}{5}$).

Zum Zeitpunkt t_0 seien die Anfangswerte gegeben durch $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$.

11.7a) Stellen Sie das Räuber-Beute Modell in der Form einer linearen Rekursion gemäss

$$x^{k+1} = Ax^k \tag{11.7.2}$$

dar, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $x^k \in \mathbb{R}^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

11.7b) Für welche(n) Wert(e) von α gibt es $\left[\begin{smallmatrix} p_0 \\ q_0 \end{smallmatrix}\right] \neq 0$ so, dass $p_k = p_0$ und $q_k = q_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$?

Hinweis: Natürlich muss man nur herausfinden, wann $p_1 = p_0$ und $q_1 = q_0$. Die Berechnung von Eigenwerten ist für diese Teilaufgabe nicht notwendig.

11.7c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [0, \frac{9}{20})$.

11.7d) Analysieren Sie das Verhalten von (p_k, q_k) für $t_k \to \infty$ in Abhängigkeit des reellen Parameters $\alpha > 0$. Genauer, für welche Werte von $\alpha \in (0, \frac{9}{20})$ gilt $p_k^2 + q_k^2 < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Startwerte $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$?

Hinweis: Man hat die Beträge aller Eigenwerte der Rekursionsmatrix in Abhängigkeit vom Parameter zu inspizieren.

11.7e) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [p,q] = raeuber_beute_modell( alpha ),
```

welche einen konkreten reellen Wert $\alpha > 0$ als Eingabe nimmt und das Verhalten des Räuber-Beute Modells über eine lange Zeitdauer $[0, t_{100}]$ *simuliert*, wobei $t_k = 0.1 \cdot k$. Als Startwerte wählen wir $x^0 = \begin{bmatrix} 300 \\ 600 \end{bmatrix}$. Die Funktion soll die Werte für p_k, q_k über diesen Zeitraum plotten und $x^{100} = \begin{bmatrix} p^{100} \\ q^{100} \end{bmatrix}$ zurückgeben. Überprüfen Sie so Ihre Berechnungen in Teilaufgabe 11.7d).

Abgabe:

In der Woche vom 07. Dezember 2020 beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webseite beschrieben..