

Lineare Algebra I

Bonusaufgabe 2

1a) Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die beiden Gleichungen des Systems als Geradengleichungen und zeichnen Sie diese Geraden in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie zudem auch die Lösungsmenge des Gleichungssystems in das Koordinatensystem ein.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 8 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Gekürzt:

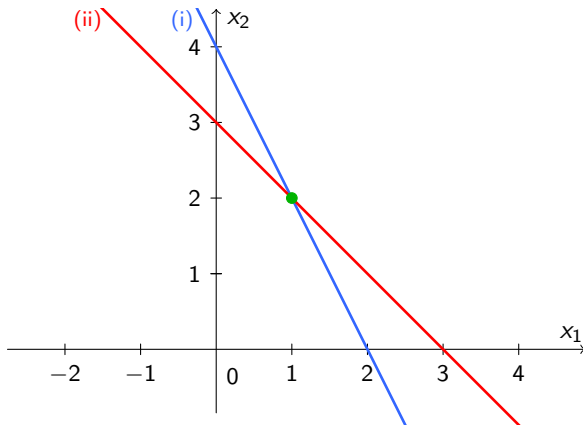
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Gerade g mit der Gleichung $2x_1 + x_2 = 4$ zeichnen. Varianten:

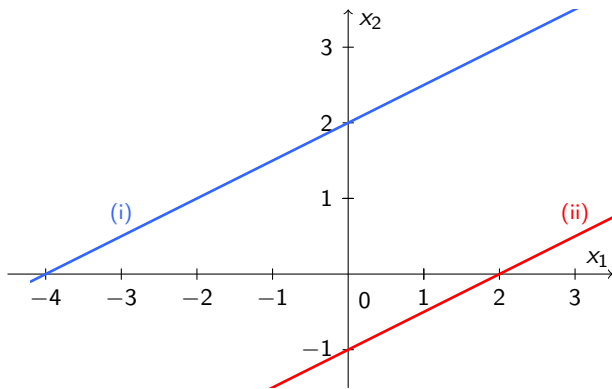
- ▶ Auflösen nach x_2 : $x_2 = 4 - 2x_1$
Caveat: Geht nur, wenn der Koeffizient von x_2 nicht Null ist.
- ▶ Achsenabschnittsform: $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} = 1$
Caveat: Geht nur, wenn die rechte Seite und die Koeffizienten nicht Null sind.
- ▶ Hessesche Normalform: g ist senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und hat orientierten Abstand $4/\sqrt{5}$ vom Ursprung.
Vorteil: Geht immer.

$$(i) \quad 2x_1 + x_2 = 4$$

$$(ii) \quad x_1 + x_2 = 3$$



1b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen geometrische Darstellung unten eingezeichnet ist.



Wir lesen ab (Achsenabschnitt, Steigung):

$$(i) \quad x_2 = 2 + \frac{x_1}{2}$$

$$(ii) \quad x_2 = -1 + \frac{x_1}{2}$$

Umformen:

$$(i) \quad x_1 - 2x_2 = -4$$

$$(ii) \quad x_1 - 2x_2 = 2$$

1c) Geben Sie ein eigenes Beispiel für ein 2×2 lineares Gleichungssystem, welches unendlich viele Lösungen besitzt. Zeichnen Sie zudem dessen geometrische Darstellung in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

$$(i) \quad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

$$(ii) \quad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

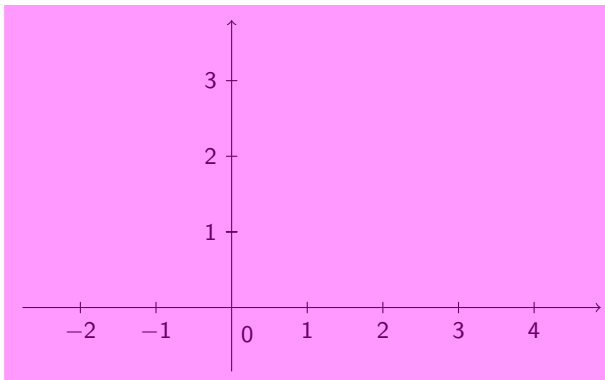
Geometrisch (zweiparametrische Lösungsschar):

1c) Geben Sie ein eigenes Beispiel für ein 2×2 lineares Gleichungssystem, welches unendlich viele Lösungen besitzt. Zeichnen Sie zudem dessen geometrische Darstellung in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

$$(i) \quad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

$$(ii) \quad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

Geometrisch (zweiparametrische Lösungsschar):



2. Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme der Form $Ax = c$. Verbinden Sie jedes dieser Gleichungssysteme mit dessen geometrischer Interpretation (ohne dass Sie die Gleichungssysteme vorab graphisch darstellen):

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(i) } 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

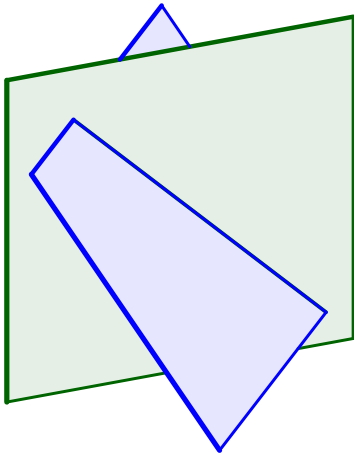
$$\text{(ii) } 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2$$

$$\text{(iii) } 2x_1 - x_2 + x_3 = -2$$

Die Gleichung (ii) folgt durch Verdoppeln aus (i). Daher stellen (i) und (ii) dieselbe Ebene dar.

Der grüne Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zum blauen

Normalenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die zwei Ebenen schneiden sich also.



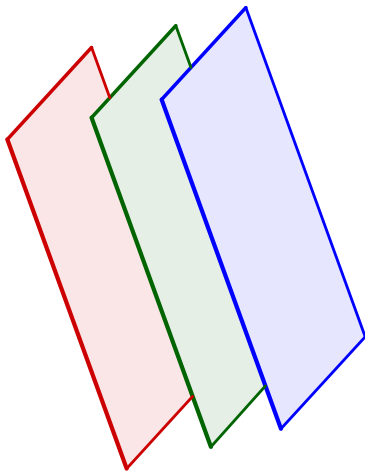
$$2b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$(i) \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$(ii) \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$(iii) \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = -4$$

Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stimmen überein,
die drei Ebenen sind also parallel. Ihre orientierten Abstände vom
Ursprung sind $1/\sqrt{6}$, $5/\sqrt{6}$, und $-4/\sqrt{6}$.



$$2c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

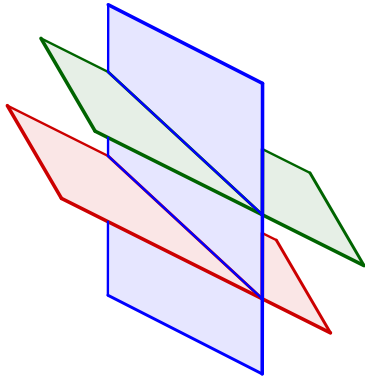
$$(i) \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$(ii) \quad 2x_1 + 3x_2 = 3$$

$$(iii) \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ stimmen überein, diese zwei Ebenen sind also parallel. Ihre orientierten Abstände vom Ursprung sind $2/\sqrt{6}$, und $8/\sqrt{6}$.

Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zum roten resp. grünen Normalenvektor: Die blaue Ebene schneidet also die beiden parallelen Ebenen.



$$2d) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(i) \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$(ii) \quad x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1$$

$$(iii) \quad 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind paarweise nicht parallel. Sie liegen nicht in einer Ebene. Die drei Ebenen schneiden sich daher in einem Punkt.

