Lineare Algebra I

Bonusaufgabe 3 (in Serie 4)

1.(a) Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Gilt $IG = GI$?

$$IG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = G$$

$$GI = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = G$$

Bemerkung: Es gilt ja allgemein für jede 2×2-Matrix A

$$IA = A = AI$$

(ii) Gilt $DH = HD$?

$$DH = 3IH = 3H = 3HI = H(3I) = HD$$

(ii) Gilt $DH = HD$?

$$DH = 3IH = 3H = 3HI = H(3I) = HD$$

Dabei ist es vollkommen Wurst, was H für eine 2×2 Matrix ist. Deshalb gilt genauso bei (iv) und (v):

(ii) Gilt $DH = HD$?

$$DH = 3IH = 3H = 3HI = H(3I) = HD$$

Dabei ist es vollkommen Wurst, was H für eine 2×2 Matrix ist. Deshalb gilt genauso bei (iv) und (v):

$$DF = FD \tag{iv}$$

Und nochmal genauso:

$$DG = GD \tag{v}$$

Auch die Zahl 3 spielt keine Rolle: Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, jede Matrix $D := \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und jede 2×2-Matrix A gilt $DA = AD = \lambda A$.

Aber Achtung bei (iii): Gilt $FH = HF$?

$$FH = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 32 & 12 \end{pmatrix}$$

aber

$$HF = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$$

Also $FH \neq HF$ obwohl F eine Diagonalmatrix ist.

Aber Achtung bei (iii): Gilt $FH = HF$?

$$FH = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 32 & 12 \end{pmatrix}$$

aber

$$HF = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$$

Also $FH \neq HF$ obwohl F eine Diagonalmatrix ist.
Beachte den Spalten- und Zeilenstruktursatz!

(vi) Und hier? Gilt $GH = HG$?

$$GH = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 9 \\ 36 & 6 \end{pmatrix}$$

$$HG = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 28 & 30 \end{pmatrix}$$

D.h. in diesem Beispiel gilt $GH \neq HG$.

Lehre daraus

Die Vielfachen $D := \lambda I$ der 2×2-Einheitsmatrix I kommutieren bei der Multiplikation mit allen 2×2-Matrizen A:

$$DA = AD = \lambda A$$

Tatsächlich sind es **nur** diese Matrizen λI welche mit **allen** anderen 2×2-Matrizen kommutieren.

Dasselbe gilt für den Fall von $n \times n$-Matrizen.

(b) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_1 & -4 \\ -6 & b_2 \end{pmatrix}$$

Finden Sie Werte für die Koeffizienten b_1, b_2 von B, so dass $AB = BA$ erfüllt ist. Finden Sie andererseits Werte für b_1, b_2, so dass $AB \neq BA$ gilt.

Wir rechnen AB und BA einfach einmal aus:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & -4 \\ -6 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 12 & 2b_2 - 4 \\ 3b_1 + 6 & -b_2 - 12 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 & -4 \\ -6 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 12 & 2b_1 + 4 \\ 3b_2 - 6 & -b_2 - 12 \end{pmatrix}$$

Die roten Einträge auf der Diagonale stimmen bereits überein.
Damit auch die andern Koeffizienten übereinstimmen muss gelten:

$$2b_2 - 4 = 2b_1 + 4 \quad \text{und} \quad 3b_1 + 6 = 3b_2 - 6$$

Das ist ein LGS für b_1, b_2:

$$\begin{aligned} 2b_1 - 2b_2 &= -8 \\ 3b_1 - 3b_2 &= -12 \end{aligned} \quad \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \quad b_2 = \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \; b_1 = \alpha - 4.$$

Für Werte b_1, b_2 nicht von dieser Form gilt $AB \neq BA$, also z.B. $b_1 = b_2 = 0$.

Allgemein: Sei $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Damit $AC = CA$ gilt, d.h. $AC - CA = 0$, muss gelten

$$\begin{aligned} AC - CA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2c - 3b & 2(-a + b + d) \\ 3a - 2c - 3d & 3b - 2c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir lesen das LGS mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten sofort ab

$$\begin{array}{rrrrl} & -3b & +2c & & = 0 \\ -2a & +2b & & +2d & = 0 \\ 3a & & -2c & -3d & = 0 \\ & 3b & -2c & & = 0 \end{array}$$

Mit Gauss findet man flugs die allgemeine Lösung: $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ sind freie Parameter, $b = \frac{2}{3}c$, $a = \frac{2}{3}c + d$. Also

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c + d & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}$$

(c) Seien E, F, G, H beliebige reelle 2×2-Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für **alle** Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(c) Seien E, F, G, H beliebige reelle 2×2-Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für **alle** Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $EFG + EFG = 2EFG$ gilt allgemein:

$$(EFG + EFG)_{ij} = (EFG)_{ij} + (EFG)_{ij} = 2(EFG)_{ij} = (2EFG)_{ij}$$

(ii) $EFG + EGF = 2EFG$ ist äquivalent (subtrahiere EFG) zu $EGF = EFG$. Mit $E = I$ müsste gelten $GF = FG$, das ist aber im allgemeinen falsch.

(iii) $G(H+E) = GE + GH$ ist korrekt:

$$G(H+E) \underset{\text{gesetz}}{\overset{\text{Distributiv-}}{=}} GH + GE \underset{\text{gesetz}}{\overset{\text{Kommutativ-}}{=}} GE + GH$$

(iv) $EFEFG + FEEFG + E^2F^2G = 3E^2F^2G$ ist im Allgemeinen falsch, sogar für $G = I$:

$EFEF + FEEF = 2E^2F^2$. Dies ist z.B. für $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ falsch. Dann gilt nämlich $E^2 = F^2 = 0$, aber $EF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (EF)^2 \neq 0$.

(v) $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$ ist richtig, denn

(v) $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$ ist richtig, denn

$$EGHH + EGGH \overset{\text{Distributiv-}}{\underset{\text{gesetz}}{=}} (EGH + EGG)H = (EGH + EG^2)H$$

(vi) $(GH)^2 = G^2H^2$ ist im Allgemeinen falsch.

(vi) $(GH)^2 = G^2H^2$ ist im Allgemeinen falsch.

Wie gesehen, z.B. für $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $(GH)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aber $G^2H^2 = 0$.