

Serie 5

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 30. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s05>.

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a) Seien u und v Lösungen des LGS $Ax = b$ mit n Unbekannten. Der Rang des LGS sei r . Falls $n = r$ gilt, so folgt $u = v$.
- (b) Sei $Ax = 0$ ein HLGS und $x \neq 0$ eine Lösung davon. Dann ist der Rang r des Gleichungssystems gleich der Anzahl n der Unbekannten.
- (c) Sei $Ax = b$ ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist der Rang r grösser als die Anzahl m der Gleichungen.
- (d) Sei $Ax = b$ ein LGS mit n Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. $u \neq 0$ sei eine Lösung des HLGS $Ax = 0$ und v eine Lösung von $Ax = b$. Dann hat $Ax = b$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

2. Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von a – den Rang des folgenden Gleichungssystems mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2 + 3a)x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

3. Bestimmen Sie, welche Matrizen B mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ kommutieren, d.h. für welche B die Gleichung $AB = BA$ gilt.

4. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dann ist das Vektorprodukt von x und y definiert als

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine 3×3 -Matrix B so, dass

$$x \times y = By.$$

b) Zeigen Sie, dass $x \times y$ senkrecht auf x und y steht.

c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten nach:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (\text{Grassmann})$$

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \quad (\text{Jacobi})$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d) \quad (\text{Lagrange})$$

d) Verwenden Sie die Lagrange-Identität um zu zeigen, dass

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\| \sin \varphi$$

gilt, wobei $0 \leq \varphi \leq \pi$ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors $a \times b$ gleich der Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist.

Hinweis: Es gilt

$$a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos \varphi.$$