

## Bonusaufgaben 5

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, dem 4. Dezember 10:00** mit dem Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=b05>. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.

Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

---

- (a) Betrachten Sie die Vektoren  $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ . Betrachten Sie zudem die folgenden Mengen von Vektoren:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beantworten Sie für jede dieser Mengen die folgenden Fragen:

- (i) Ist es möglich, einen oder beide der Vektoren  $a$  und  $b$  als Linearkombination von Vektoren aus dieser Menge darzustellen?
- (ii) Falls ja, geben Sie für jeden Vektor ein konkretes Beispiel für eine solche Linearkombination. Stellen Sie dieses Beispiel zusätzlich graphisch in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem dar.

Verwenden Sie für jede Menge jeweils ein eigenes Koordinatensystem. Begründen Sie Ihre Antworten.

Analysieren Sie Ihre obigen Resultate unter den folgenden Gesichtspunkten: Was beobachten Sie? Wie viele Vektoren scheinen Sie mindestens zu benötigen, um sowohl für  $a$  als auch für  $b$  eine Linearkombination zu finden? Welche Eigenschaften muss diese Menge von Vektoren erfüllen? Begründen Sie Ihre Antworten.

- (b) Versuchen Sie die folgende Frage mithilfe Ihrer Resultate aus der vorherigen Aufgabe zu beantworten, ohne zu rechnen. Begründen Sie ausserdem, wieso dies möglich ist.

Betrachten Sie die Polynome  $p(t) = 4t + 2$  und  $q(t) = 8t + 5$  sowie die folgenden Mengen:

$$A = \{2t + 1, 2, 0, 3t\}$$

$$B = \{1, t, t + 1\}$$

$$C = \{2t + 1, 8t + 4\}$$

$$D = \{2t + 1, 6t + 5\}$$

$$E = \{8t + 4\}.$$

Ist es möglich, eines oder beide der Polynome  $p$  und  $q$  als Linearkombination von Polynomen aus der jeweiligen Menge darzustellen?

Verifizieren Sie Ihre Überlegungen, indem Sie konkrete Beispiele für solche Linearkombinationen geben, falls welche existieren.

## Serie 11

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 11. Dezember um 14:00 Uhr** ab. Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s11>.

---

1. Betrachten Sie die Menge  $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  der Paare positiver, reeller Zahlen.

Die Addition auf  $\mathbb{R}_+^2$  sei folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Definitionen der Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

1. Definition.:  $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$

2. Definition.:  $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}$

3. Definition.:  $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}$

Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

$\mathbb{R}_+^2$  ist ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar gemäss der...

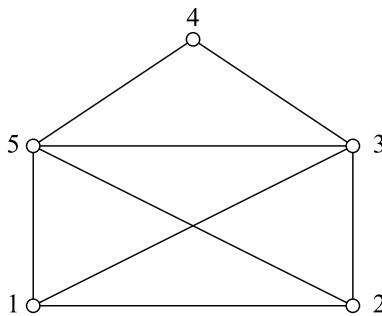
- (a) 1. Definition.
- (b) 2. Definition.
- (c) 3. Definition.

2. Es seien  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  Spaltenvektoren. Das *Spatprodukt* dieser drei Vektoren ist dann definiert als

$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c.$$

- Beweisen Sie, dass  $S(a, b, c) = \det(a, b, c)$  gilt.
- Beweisen Sie, dass  $|S(a, b, c)|$  das Volumen des von  $a, b$  und  $c$  aufgespannten Parallelepipeds (Spat) ist.
- Was sagt das Vorzeichen von  $S(a, b, c)$  aus?

3. Wir interpretieren den Graphen  $G$



aus Serie 10, Aufgabe 4 als elektrisches Netzwerk, wobei jede Kante einem Widerstand von  $R_0 = 1 \Omega$  entspricht. Berechnen Sie den Widerstand  $R$  zwischen den Knoten 1 und 5 mit Hilfe der Formel  $R = R_0 \frac{\tau_{15}}{\tau}$ , wobei  $\tau$  die Anzahl der aufspannenden Bäume von  $G$  ist und  $\tau_{15}$  die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 enthalten. Verwenden Sie dazu die Formel aus Serie 10, Aufgabe 4.

*Hinweis:* Die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 *nicht* enthalten, ist gleich der Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen, den man erhält, wenn man die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

4.

a) Für die Vandermonde-Determinante gilt die Formel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Verifizieren Sie diese Formel für  $n = 3$ .

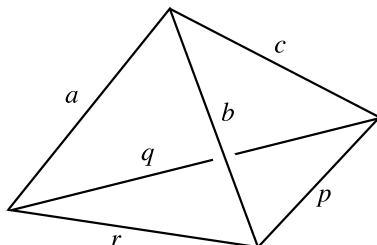
b) Für die Fläche eines ebenen Dreiecks mit den Seiten  $a, b, c$  gilt bekanntlich die Flächenformel von Heron:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ . Man kann zeigen, dass die Formel

$$F^2 = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

denselben Wert für  $F$  ergibt. Für das Volumen  $V$  eines Tetraeders mit den Kantenlängen  $a, b, c, p, q, r$



gilt eine ähnliche Formel, nämlich

$$V^2 = \frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Inhalt hat das Tetraeder mit den Kantenlängen  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $p = 4$ ,  $q = 3$  und  $r = 2$ ?