D-MAVT
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Lineare Algebra I

HS 2020

Serie 12

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 18. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s12`.

---

1. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten ist der Unterraum $P_2 := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Polynome mit Grad ≤ 2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\operatorname{span}\{x+1, x-1, x^2+1, x^2-1\}$ ist gleich P_2.

(b) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ sind linear unabhängig.

(c) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ bilden ein Erzeugendensystem von $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(d) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ bilden ein Erzeugendensystem von P_2.

2. Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei $\oplus$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

3.

a) Sei V die folgende Menge von Vektoren: $\left\{(x, y, 3x-y)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Ist die Menge $W = \left\{(x, 3x-1, x)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4.

a) Die Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$, versehen mit den Rechenregeln

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ist ein Körper. Das heisst, es gelten bezüglich Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ die selben Rechenregeln wie in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$. Versehen Sie

$$V = \mathbb{Z}_2^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{Z}_2\right\}$$

mit den passenden Vektoroperationen und zeigen Sie, dass V damit ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ wird.

b) Sei $C = \{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_1 + \ldots + x_n \text{ ist gerade}\}$. Zeigen Sie, dass C ein Unterraum von $\mathbb{Z}_2^n$ ist.

Bemerkung: C ist ein sogenannter 1-fehlererkennender Code: Wird ein Bit einer Nachricht $x \in C$ falsch übermittelt, kann der Empfänger dies feststellen (wie?) und die Wiederholung der Übermittlung veranlassen.