

## Serie 13: Semesterendtest

Dieser Test dient der Selbsteinschätzung. Einsendeschluss: Mittwoch 2021, der 24. Februar um 10:00 Uhr. Bearbeitung auf <https://echo.ethz.ch>.

---

1. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Für welche reellen Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  gilt  $B = A^{-1}$ ?

- (a)  $x_1 = 1, x_2 = 1.$
- (b)  $x_1 = -1, x_2 = 1.$
- (c)  $x_1 = 1, x_2 = -1.$
- (d)  $x_1 = -1, x_2 = -1.$

2. Gegeben sei  $Ax = b$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$
$$b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } b \notin \text{span} \{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}.$$

Dann existiert keine Lösung von  $Ax = b$ .

- (a) Richtig.
- (b) Falsch.

3. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Unterraums  $\{x \mid Ax = 0\}$  ist gegeben durch...

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

4. Welche der folgenden drei Vektoren sind jeweils linear unabhängig?

(a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(b)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

5. Betrachten Sie den Vektorraum  $\mathcal{F}$  der Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten sind die Unterräume  $\mathcal{P}_n(x) := \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$  der Polynome mit Grad  $\leq n$ . Es gilt:

- (a) Die Dimension des Unterraums  $\mathcal{P}_n$  ist  $n + 1$ .
- (b) Die Sinusfunktion ist Element von  $\mathcal{F}$  ( $\sin \in \mathcal{F}$ ), aber liegt in keinem der Unterräume  $\mathcal{P}_n$  ( $\sin \notin \mathcal{P}_n$ ).
- (c) Sinus und Cosinus sind linear abhängige Vektoren in  $\mathcal{F}$ .
- (d)  $1, \sin^2, \cos^2$  sind linear abhängige Vektoren in  $\mathcal{F}$ .
- (e) Sind zwei Polynome  $p(x), q(x)$  linear unabhängig, so auch die Polynome  $xp(x), xq(x)$ .
- (f) Der Untervektorraum  $V = \text{span}\{\sin\}$  schneidet den Unterraum  $\mathcal{P}_3$  nur in 0 (formal  $V \cap \mathcal{P}_3 = \{0\}$ ) und es gilt  $\dim(\text{span}\{\sin, 1, x, x^2, x^3\}) = 5$ .
- (g) Die Abbildung  $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$  ist linear.

6. Gegeben sei die  $7 \times 7$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

- (a)  $A$  ist orthogonal.
- (b)  $A$  ist nicht orthogonal.

7. Es seien  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl mit  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{I}_n$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix,  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix,  $u, v \in \mathbb{R}^n$  zwei Vektoren und es gelte

$$A^2 = 2\mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad Au = v.$$

Dann folgt:

- (a) Die Determinante von  $A$  ist entweder  $-\sqrt{2^n}$  oder  $\sqrt{2^n}$ . Andere Werte sind nicht möglich.
- (b) Das lineare Gleichungssystem  $Ax = u$  hat die Lösung  $x = \frac{1}{2}v$ .

8. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) 0.
- (b) -1.
- (c) 2.

9. Gegeben seien zwei Matrizen  $A$  und  $B$  aus  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , mit  $n > 1$ . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) Es gilt  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .
- (b) Es gilt  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .
- (c) Aus  $\det(A) \neq 0$  folgt, dass die Spaltenvektoren  $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$  von  $A$  linear unabhängig sind.
- (d) Es gilt  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- (e) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl  $\lambda$  gilt  $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ .
- (f) Es gilt  $\det(A) = \det(A^T)$ , wobei  $A^T$  die Transponierte von  $A$  bezeichnet.
- (g) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl  $\lambda$  gilt  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .