

Lösung Serie 1

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 2. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01>.

1. Gegeben sei das LGS (lineare Gleichungssystem)

$$\begin{array}{rcl} ax & + & y = a \\ x & + & ay = a \end{array} .$$

Welche Aussagen treffen zu?

- ✓ (a) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Nach kurzer Rechnung folgt, dass $x = y = 2/3$ die einzige mögliche Lösung ist.

- (b) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Für $a = 1$ sind beide Gleichungen $x + y = 1$. Also hat man nur eine lineare Gleichung, und ein solche kann nicht gleichzeitig die Werte zweier Variablen fixieren.

- ✓ (c) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

Mit $a = -1$ erhalten wir die Gleichungen $-x + y = -1$ und $x - y = -1$. Multipliziert man die erste Gleichung beidseitig mit -1 (eine solche Operation lässt die Lösungsmenge natürlich unverändert) so erhalten wir das widersprüchliche Gleichungssystem: $x - y = 1$ und $x - y = -1$.

- ✓ (d) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Für $a = 1$ ist jedes Paar $(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung des LGS.

- (e) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.

Ein LGS hat entweder **keine, genau eine** oder aber **unendlich viele** Lösungen. Achtung: Ein Paar (x, y) welches das LGS erfüllt zählt als **eine** Lösung, nicht etwa als zwei Lösungen.

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{array}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 \end{array}$$

Wir haben mehr Unbekannte als Gleichungen. In solchen Fällen gibt es entweder keine Lösung (wenn mehrere Gleichungen sich widersprechen, z.B. $x + y + z = 1$ und $x + y + z = 0$) oder unendlich viele. Hier hat man unendlich viele Lösungen: für jede Wahl von x_3 kann man ein passendes x_2 finden, so dass $-5x_2 + 5x_3 = 2$ gilt. Formell schreiben wir: $x_3 = t \in \mathbb{R}$ (t ist ein sogenannter **freier Parameter**). Daraus folgt

$$x_2 = \frac{2 - 5t}{-5} = t - \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad x_1 = 2 - 3\left(t - \frac{2}{5}\right) + t = \frac{16}{5} - 2t.$$

Die **Lösungsmenge** des Gleichungssystems ist also

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{16}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Lösen Sie die Aufgaben **2** und **3** nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Der folgende Code löst die Aufgabe. % markiert kommentierte Zeilen, die also nicht ausgeführt werden. Jede Zeile ist mit Enter abzuschliessen/einzugeben.

```
%Aufgabe 2
A=[ 1 1 2 2;
    1 2 3 4;
    1 3 6 10;
    1 4 10 20]
b1=[1; 3; 2; 2]
b2=[0; -3; 2; 1];
x1=A\b1
x2=A\b2

% Aufgabe 3
C=[3 4 2;
   1 3 -1];
d=[8; 1];
x3=null(C,'r')
% null(C) berechnet eine nichttriviale Loesung des entsprechenden
% homogenen Gleichungssystems; die Option 'r' stellt sicher, dass
% die Loesung rational ist
x4=C\d
% Die allgemeine Loesung ist von der Form c*x3+x4, wobei c eine
% beliebige reelle Zahl ist.
```

5. (Fakultativ) Man zeige, dass zur Ausführung des Gaussverfahrens die Operation

(II) *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile*

genügt.

Man muss zeigen, dass man jede Operation vom Typ (I) - Zeilen vertauschen - durch eine Folge von Operationen vom Typ (II) ersetzen kann. Also angenommen man möchte die a -te und b -te Zeile vertauschen, dann kann man zum Beispiel wie folgt vorgehen:

Operation	Inhalt der a -ten Zeile	Inhalt der b -ten Zeile
	X	Y
zur Zeile b Zeile a hinzuaddieren	X	$X + Y$
von Zeile a Zeile b subtrahieren	$-Y$	$X + Y$
zur Zeile b Zeile a hinzuaddieren	$-Y$	X .

Bis auf das Vorzeichen in der Zeile a haben wir die gewünschte Vertauschung erreicht. Da Vorzeichen beim Gauss-Verfahren keine Rolle spielen, ist diese Konfiguration äquivalent zu derjenigen, in der Y in der a -ten Zeile und X in der b -ten Zeile steht.