

Lösung Serie 2

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 9. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s02>.

1. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.

Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x = a$ keine Lösung für $a \neq 0$ respektive unendlich viele Lösungen für $a = 0$.

- (b) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$ keine Lösung. Finden Sie ein Beispiel mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen.

- (c) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

Doch, z.B. kann eine bereits im System vorhandene Gleichung beliebig oft hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.

- ✓ (d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

2. Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & + & 2bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 3ax_3 & = & b \end{array}$$

- a) Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,
- b) Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
- c) eindeutig lösbar ist,
- d) keine Lösung hat

und geben Sie in jedem Fall die Lösungsmenge an.

Mit dem Gauss-Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} (*)$$

Fall $b = 0$: Zeilen vertauschen ergibt

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- i) $a = 0$: Die Lösungsmenge ist $x_3 = s$, $x_2 = t$, $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}s$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.
- ii) $a \neq 0$: Die Lösungsmenge ist $x_3 = 0$, $x_2 = t$, $x_1 = \frac{5}{3}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Fall $b \neq 0$: Hier ist $-2b$ Pivot bei (*):

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & b \end{array}$$

- i) $a = 0$: In diesem Fall gibt es keine Lösung.
- ii) $a \neq 0$: Die Lösung ist $x_3 = \frac{b}{3a}$, $x_2 = 0$, $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4b}{9a}$.

Folglich gilt

- a) falls $a = 0$, $b = 0$,
- b) falls $a \neq 0$, $b = 0$,
- c) falls $a \neq 0$, $b \neq 0$,
- d) falls $a = 0$, $b \neq 0$.

3. Dimensionsanalyse des Strömungswiderstands eines Schiffes:

Im cgs-Masssystem gilt für die Einheiten:

Dichte des Wassers	ρ	$cm^{-3}g^1sec^0$,
Schiffsgeschwindigkeit	v	$cm^1g^0sec^{-1}$,
benetzte Oberfläche	\mathcal{O}	$cm^2g^0sec^0$,
Schiffsmasse	m	$cm^0g^1sec^0$,
Bremsverzögerung	a	$cm^1g^0sec^{-2}$.

a) Welche Formeln des Typs

$$\rho^\alpha v^\beta \mathcal{O}^\gamma m^\delta a^\varepsilon = K$$

sind vom Masssystem her möglich, wenn K eine dimensionslose Zahl sein soll?

b) Welche Formeln ergeben sich für die Widerstandskraft $F = ma$?

Bemerkung: Die gefundene Lösung ist bei Schiffbauingenieuren tatsächlich in Gebrauch.

a) Damit K eine dimensionslose Zahl ist, müssen die Summen der Exponenten von cm , g und sec jeweils 0 ergeben. Dies entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc} -3\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & & + & \varepsilon & = & 0 \\ \alpha & & & & & + & \delta & & = & 0 \\ & & -\beta & & & & & - & 2\varepsilon & = & 0. \end{array}$$

Das entsprechende Gauss-Schema ist

$$\begin{array}{cccccc|cccccc|cccccc|cccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \rightarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \rightarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \rightarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

und man kann also δ und ε frei wählen. Setze $\delta = s, \varepsilon = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Für die restlichen Exponenten findet man

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s, \\ \beta &= -2t, \\ \alpha &= -s. \end{aligned}$$

Die Formeln vom Typ

$$\rho^{-s} v^{-2t} \mathcal{O}^{\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s} m^s a^t = K$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ ergeben folglich das gewünschte Resultat.

b) Wenn man in die bei a) erhaltene Formel $s = t = 1$ setzt, findet man

$$\rho^{-1} v^{-2} \mathcal{O}^{-1} m a = K.$$

Nach Umformen ergibt dies

$$ma = K\rho v^2 \mathcal{O}.$$

Aus der Formel $F = ma$ folgt also $F = K\rho v^2 \mathcal{O}$.

Bemerkung: Die Konstante K nennt man *Widerstandsbeiwert*.

4. Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.
- b) Lösen Sie die Aufgabe nochmals mit Hilfe von MATLAB.
- a) Für $i = 1, 2$ entspricht $Ax = b_i$ einem linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3 . Wie in Serie 1, Aufgabe 2, kann man beide rechten Seiten im gleichen Gauss-Schema schreiben (der Hauptteil ist gleich):

$$\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Für b_1 folgt also:

$$\begin{aligned} x_3 & \text{ beliebig, also } x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ ist ein freier Parameter,} \\ x_2 + 2x_3 = 1 & \Rightarrow x_2 = 1 - 2t, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 & \Rightarrow x_1 = -1 + 3t + 2(1 - 2t) = 1 - t. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b_1$ ist also

$$L_1 = \left\{ (1 - t, 1 - 2t, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für b_2 folgt analog

$$\begin{aligned} x_3 & \text{ beliebig, also } x_3 = s \in \mathbb{R} \text{ ist ein freier Parameter,} \\ x_2 + 2x_3 = 3 & \Rightarrow x_2 = 3 - 2s, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 & \Rightarrow x_1 = -2 + 3s + 2(3 - 2s) = 4 - s. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b_2$ ist somit

$$L_2 = \left\{ (4 - s, 3 - 2s, s)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

- b) Siehe Lösung Serie 1, Aufgabe 4.