D-MAVT | Lineare Algebra I | HS 2020

Prof. Dr. N. Hungerbühler

Lösung Serie 4

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 23. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s04`.

---

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $(AB)^T = A^T B^T$.

Die Formel $(AB)^T = A^T B^T$ ist im Allgemeinen falsch, so auch in diesem Beispiel. Nachrechnen zeigt: $(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 21 & 25 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -6 & 4 & -8 \\ 15 & 24 & 24 \\ 17 & 17 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = A^T B^T$ was schon von den Matrixdimensionen her keine Gleichheit sein kann. Aber auch für quadratische Matrizen A, B derselben Grösse ist die Formel im Allgemeinen falsch.

√ (b) $(AB)^T = B^T A^T$.

Richtig! Diese Formel ist sogar im Allgemeinen richtig (sofern das Produkt AB definiert ist). Rechnung: $(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = B^T A^T$.

√ (c) $A^T A$ ist symmetrisch.

Ja, es gilt allgemein: Ist A eine $m \times n$-Matrix, so ist $A^T A$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix, denn $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$. Und eine Matrix M ist per Definition genau dann symmetrisch, wenn $M^T = M$ gilt.

√ (d) AA^T ist symmetrisch.

Ja, es gilt allgemein: Ist A eine $m \times n$-Matrix, so ist AA^T eine symmetrische $m \times m$-Matrix, denn $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$. Bemerkung: $A^T A$ und AA^T sind beide symmetrisch, aber im Allgemeinen nicht gleich (z.B. wenn $n \neq m$).

√ (e) Ist C eine beliebige quadratische Matrix, so ist $C + C^T$ symmetrisch.

Ja, es gilt $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$. Bemerkung: wäre C nicht quadratisch, so wäre $C + C^T$ nicht definiert.

Bemerkung: Es gilt allgemein: $(AB)^T = B^T A^T$ falls A eine $m \times p$ und B eine $p \times n$-Matrix ist. Die Anzahl Spalten von A und die Anzahl Zeilen von B (beide gleich p) müssen übereinstimmen, damit AB definiert ist - das Produkt $B^T A^T$ ist dann automatisch auch definiert. Es sei $C = AB$ und a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} bezeichne die Einträge der jeweiligen Matrizen (der erste Index ist die Zeilennummer, der zweite die Spaltennummer). Weiter seien α_{ij}, β_{ij} die Einträge der Matrizen A^T, B^T. Aus der Definition der Transponierten folgt $\alpha_{ij} = a_{ji}, \beta_{ij} = b_{ji}$, und die Definition der Matrizenmultiplikation liefert $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$. Nun ist der Eintrag (i,j) der Matrix $(AB)^T$ gleich (beachte die vertauschten Indices) $c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} \beta_{ik} \alpha_{kj}$ und dieser Ausdruck entspricht auch dem Eintrag (i,j) der Matrix $B^T A^T$.

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:
$AB,\ BA,\ Ax,\ A^2 := AA,\ B^2 := BB,\ y^T x,\ yx,\ xy^T,\ B^T y,\ y^T B.$

b) Lösen Sie a) nochmals mit Hilfe von Matlab.

a) Es gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -21 \\ -9 & -1 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -1 & -1 \\ -17 & 15 & -22 \\ -11 & -13 & 21 \end{pmatrix}$$

$$y^T x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -20$$

$$xy^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 6 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix}$$

$$B^T y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y^T B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrixprodukte BA, B^2 und yx sind nicht definiert.

3. *Polynominterpolation:*
Gegeben sind die Funktionswerte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ über den Abszissen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Gesucht ist das interpolierende Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Es soll also gelten

$$p(x_i) = y_i, \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq n.$$

a) Man bestimme das Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in Matrixschreibweise.

b) Man bestimme das Interpolationspolynom für

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \qquad (n = 4).$$

c) Man betrachte die Polynome

$$\ell_i(x) := \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Welche Werte nimmt ℓ_i in den Punkten x_k an? Man bestimme die Lösung von b) mit Hilfe der Polynome ℓ_i (Lagrangesche Interpolationsformel).

a) Wir haben das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & 1 \\ \hline 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n & y_1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n & y_n \end{array}$$

b) Nach Einsetzen der angegeben Werte von x_i und y_i in **a)** erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 2 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 27 & 81 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 64 & 256 & 0 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 78 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 60 & 252 & -4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 168 & 8 \end{array} \rightarrow$$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	2	6	14	-2
0	0	0	6	36	5
0	0	0	0	24	-12

Rückwärtseinsetzen ergibt dann

$$a_4 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{23}{6}, a_2 = -9, a_1 = \frac{20}{3}, a_0 = 0.$$

c) Es gilt

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{für } k = i \\ 0, & \text{für } k \neq i. \end{cases}$$

Definiere

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1, & \text{für } k = i \\ 0, & \text{für } k \neq i \end{cases}$$

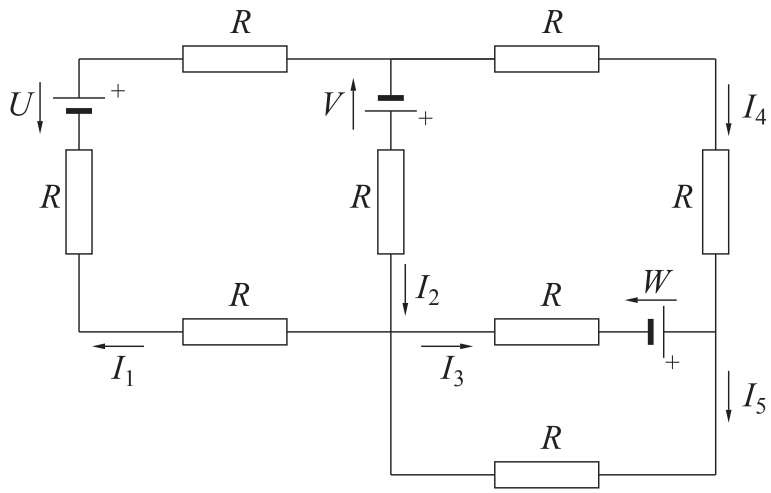
und sei $L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)$. Aus den obigen Gleichungen für $\ell_i(x_k)$ folgt

$$L(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ik} = y_k.$$

Also erfüllt $L(x)$ die Bedingungen für das Polynom $p(x)$.

Für die Werte in **b)** erhalten wir

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=0}^{4} y_i \ell_i(x) \\ &= \ell_1(x) + 2\ell_3(x) \\ &= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)(x-4) \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{2}x^4 + \frac{23}{6}x^3 - 9x^2 + \frac{20}{3}x. \end{aligned}$$



4. *Kirchhoffsche Regeln:*
Für elektrische Stromkreise gelten die folgenden Regeln:

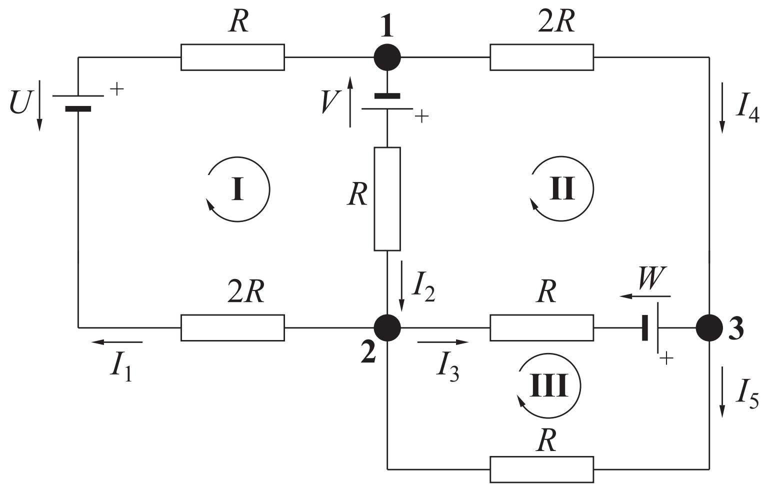
- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null.
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die fünf Teilströme des skizzierten Gleichstromkreises und lösen Sie es für

$$R = 300\Omega, \quad U = V = 300V, \quad W = 200V.$$

Hinweis: Wählen Sie die Vorzeichen entsprechend den Zählpfeilen!

Für die Teilströme $I_1, \ldots, I_5$ kann man aus der obigen Skizze die folgenden Gleichungen ablesen:



$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\textbf{1.} & I_1 & - & I_2 & & & - & I_4 & & & = & 0 \\
\textbf{2.} & -I_1 & + & I_2 & - & I_3 & & & + & I_5 & = & 0 \\
\textbf{3.} & & & & & I_3 & + & I_4 & - & I_5 & = & 0
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\textbf{I.} & 3RI_1 & + & RI_2 & & & & & & & = & U+V \\
\textbf{II.} & & & -RI_2 & - & RI_3 & + & 2RI_4 & & & = & -V-W \\
\textbf{III.} & & & & & RI_3 & & & + & RI_5 & = & W
\end{array}$$

Für $R = 300\Omega, U = V = 300V$ und $W = 200V$ bekommt man daraus die Matrix

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	−1	0	−1	0	0
−1	1	−1	0	1	0
0	0	1	1	−1	0
3	1	0	0	0	2
0	−3	−3	6	0	−5
0	0	3	0	3	2

Nach Anwendung des Gaussverfahrens wird diese zu

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	−1	0	−1	0	0
0	4	0	3	0	2
0	0	−1	−1	1	0
0	0	0	−3	6	2
0	0	0	0	78	16
0	0	0	0	0	0

Durch Rückwärtseinsetzen findet man

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 17A \\ 27A \\ 18A \\ -10A \\ 8A \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.436A \\ 0.692A \\ 0.462A \\ -0.256A \\ 0.205A \end{pmatrix}.$$