

## Lösungen Serie 5

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 30. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s05>.

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ✓ (a) Seien  $u$  und  $v$  Lösungen des LGS  $Ax = b$  mit  $n$  Unbekannten. Der Rang des LGS sei  $r$ . Falls  $n = r$  gilt, so folgt  $u = v$ .

Richtig. Dies ist Satz 1.2 aus der Vorlesung.

- (b) Sei  $Ax = 0$  ein HLGS und  $x \neq 0$  eine Lösung davon. Dann ist der Rang  $r$  des Gleichungssystems gleich der Anzahl  $n$  der Unbekannten.

Falsch. Laut Korollar 1.3 der Vorlesung hat das HLGS genau dann nichttriviale Lösungen, wenn  $r < n$ .

- (c) Sei  $Ax = b$  ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist der Rang  $r$  grösser als die Anzahl  $m$  der Gleichungen.

Falsch. Laut Korollar 1.5 der Vorlesung ist das LGS genau dann nicht für alle  $b$  lösbar, wenn  $r < m$ .

- ✓ (d) Sei  $Ax = b$  ein LGS mit  $n$  Unbekannten und ebensovielen Gleichungen.  $u \neq 0$  sei eine Lösung des HLGS  $Ax = 0$  und  $v$  eine Lösung von  $Ax = b$ . Dann hat  $Ax = b$  noch unendlich viele weitere Lösungen.

Richtig. Weil das HLGS eine nichttriviale Lösung besitzt, ist der Rang  $r < n$ . Und weil das LGS  $Ax = b$  mit  $v$  eine Lösung besitzt, kann diese nach Satz 1.2 der Vorlesung nicht eindeutig sein. Konkret ist für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch  $v + \lambda u$  eine Lösung von  $Ax = b$ : Es gilt nämlich  $A(v + \lambda u) = Av + \lambda Au = b + \lambda \cdot 0 = b$ .

2. Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von  $a$  – den Rang des folgenden Gleichungssystems mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2 + 3a)x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & a^2 + 3a & 0 \\ -2 & -1 & a & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & a^2 + 3a - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 + a & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + 3a - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + 3a - 4 & 0 \end{array}$$

Es gilt  $a^2 + 3a - 4 = 0$ , wenn

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Leftrightarrow a = 1 \text{ oder } a = -4.$$

Der Rang des Gleichungssystems ist 4, falls  $1 + a \neq 0$  und  $a^2 + 3a - 4 \neq 0$ , also für  $a \notin \{-4, -1, 1\}$ .

Der Rang des Gleichungssystems ist 3, falls  $a \in \{-4, -1, 1\}$ .

**3.** Bestimmen Sie, welche Matrizen  $B$  mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  kommutieren, d.h. für welche  $B$  die Gleichung  $AB = BA$  gilt.

Sei  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ . Damit man die gewünschte Gleichung erhält, müssen die zwei Matrizen  $AB$  und  $BA$  koeffizientenweise übereinstimmen. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{21} & 3b_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & 2b_{11} + 3b_{12} \\ b_{21} & 2b_{21} + 3b_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{11} + 2b_{21} &= b_{11} \\ b_{12} + 2b_{22} &= 2b_{11} + 3b_{12} \\ 3b_{21} &= b_{21} \\ 3b_{22} &= 2b_{21} + 3b_{22}. \end{aligned}$$

Es ist einfach nachzurechnen, dass die Lösungsmenge davon

$$\begin{aligned} b_{11} &= s \\ b_{12} &= t \\ b_{21} &= 0 \\ b_{22} &= s + t \end{aligned}$$

mit  $s, t \in \mathbb{R}$  ist. Folglich erfüllen genau die Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s + t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Bedingung  $AB = BA$ .

4. Es seien  $x, y \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist das Vektorprodukt von  $x$  und  $y$  definiert als

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine  $3 \times 3$ -Matrix  $B$  so, dass

$$x \times y = By.$$

b) Zeigen Sie, dass  $x \times y$  senkrecht auf  $x$  und  $y$  steht.

c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten nach:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (\text{Grassmann})$$

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \quad (\text{Jacobi})$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d) \quad (\text{Lagrange})$$

d) Verwenden Sie die Lagrange-Identität um zu zeigen, dass

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \varphi$$

gilt, wobei  $0 \leq \varphi \leq \pi$  der von  $a$  und  $b$  eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors  $a \times b$  gleich der Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms ist.

*Hinweis:* Es gilt

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \varphi.$$

a) Für

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$x \times y = By.$$

b) Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt. Nachrechnen ergibt

$$\begin{aligned} x \cdot (x \times y) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Berechnung von  $y \cdot (x \times y)$  geht analog.

c) Grundsätzlich lassen sich alle drei Identitäten direkt mit den Definitionen nachrechnen. Die Grassmann-Identität rechnet man beispielsweise wie folgt

nach:

$$\begin{aligned}
 a \times (b \times c) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} \\
 &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
 &= (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Grassmann-Identität kann man die Jacobi-Identität zudem sehr elegant herleiten:

$$\begin{aligned}
 &a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) \\
 &= (a \cdot c)b - (a \cdot b)c + (b \cdot a)c - (b \cdot c)a + (c \cdot b)a - (c \cdot a)b \\
 &= (a \cdot c - c \cdot a)b + (b \cdot a - a \cdot b)c + (c \cdot b - b \cdot c)a \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist.

d) Aus der Lagrange-Identität und dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}
 \|a \times b\|^2 &= (a \times b) \cdot (a \times b) \\
 &= (a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2 \\
 &= \|a\|^2 \|b\|^2 - (\|a\| \|b\| \cos(\varphi))^2 \\
 &= \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos(\varphi)^2) \\
 &= \|a\|^2 \|b\|^2 \sin(\varphi)^2.
 \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man das gewünschte Resultat.