Lösung Serie 6

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 6. November um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s06`.

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\surd$ (a) Sei A symmetrisch und regulär. Dann ist auch A^{-1} symmetrisch.

Richtig, denn $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$. Die Regel $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ folgt aus $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$ (der erste Schritt benutzt $(AB)^T = B^T A^T$, siehe Serie 4 Aufgabe 1).

$\surd$ (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau für $a = \pm\sqrt{3/2}$ orthogonal.

Richtig. $A^T A = I$ gilt genau für diese beiden Werte. Nachrechnen liefert:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2}+\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{4}+\frac{5}{8} & \frac{a^2}{4}-\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{a^2}{4}-\frac{3}{8} & \frac{a^2}{4}+\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

(die Matrix muss symmetrisch sein (siehe Serie 4 Aufgabe 1), also beim Ausrechnen nicht unnötig arbeiten!) und $\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} = 1$ hat genau die gegebenen Werte als Lösungen. Dies gilt ebenso für $\frac{a^2}{4} + \frac{5}{8} = 1$ und $\frac{a^2}{4} - \frac{3}{8} = 0$.

(c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

Falsch, eine orthogonale Matrix A besitzt immer die Inverse A^T, da per Definition $A^T A = I$ gilt und (für quadratische Matrizen) aus $XA = I$ immer $X = A^{-1}$ folgt.

2.

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A regulär ist.

b) Für welche Werte des Parameters γ ist

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

a) Nach Satz 2.8 aus dem Buch gilt für jede $n \times n$–Matrix A:

A ist regulär $\Leftrightarrow$ das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.

Also reicht es die Lösungsmenge von $Ax = 0$ zu betrachten. Wir verwenden den Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Die einzige Lösung hier ist $x = 0$, deshalb ist A regulär.

b) Aus Satz 2.8 folgt auch für jede $n \times n$–Matrix B:

B ist singulär $\Leftrightarrow$ das Gleichungssystem $Bx = 0$ hat nichttriviale Lösungen.

Deshalb betrachten wir die Lösungsmenge von $Bx = 0$:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & \gamma & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & \gamma & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \gamma - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \\ 0 & 0 & (4-\gamma)(\gamma+2) & 0 \end{array}$$

Falls $(4 - \gamma)(\gamma + 2) = 0$ ist, ist $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter und $Bx = 0$ besitzt nichttriviale Lösungen. Somit ist B singulär für $\gamma \in \{-2, 4\}$.

3. Sei $\mathbb{I}_2$ die $2 \times 2-$Einheitsmatrix und $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$.

a) Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix $V := \mathbb{I}_2 - \alpha u\, u^T$ orthogonal?

b) Lösen Sie für die in a) ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$V\,x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

c) Kontrollieren Sie a) und b) mit MATLAB.

a) Wir können die gesuchten Werte von α wie folgt finden: V ist orthogonal, falls $V^T\,V = I_2$. Da $I_2^T = I_2$ und $(u\,u^T)^T = u\,u^T$, folgt

$$V^T = (I_2 - \alpha u\,u^T)^T = I_2 - \alpha u\,u^T = V$$

und damit

$$\begin{aligned} V^T\,V &= V\,V = (I_2 - \alpha u\,u^T)\,(I_2 - \alpha u\,u^T) \\ &= I_2\,I_2 - 2I_2\,\alpha u\,u^T + \alpha u\,u^T\,\alpha u\,u^T \\ &= I_2 - 2\alpha u\,u^T + \alpha^2 u\,\underbrace{u^T\,u}_{=1}\,u^T \\ &= I_2 + (\alpha^2 - 2\alpha) u\,u^T. \end{aligned}$$

Bemerkung: $u\,u^T$ ist eine $2 \times 2-$Matrix, aber $u^T\,u$ ist eine reelle Zahl (oder $1 \times 1-$Matrix).

Weiter, da $u\,u^T \neq 0$, gilt $V^T\,V = I_2$ genau dann, wenn $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, also für $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2$. Für $\alpha = 0$ ist $V = I_2$ trivialerweise orthogonal.

Allgemeiner ist eine $n \times n$-Matrix von der Form $I_n - 2u\,u^T$ mit $u^T\,u = 1$ immer orthogonal. Man nennt eine solche Matrix *Householder-Matrix*. Siehe dazu Seite 32 im Buch.

b) Für $\alpha = 0$:

$$V\,x = I_2\,x = x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = 2$: Da V orthogonal und symmetrisch ist, gilt $V^{-1} = V^T = V$. Also:

$$x = V^{-1} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Rechnung oben zeigt, dass für eine Householder-Matrix Q immer $QT = Q$ gilt.

c)
```
%a)
u = [sqrt(3)/2;1/2];
A = eye(2)-2*(u*u.');

%Bestimmt die Matrix V fuer alpha = 2. eye(2) bezeichnet die Einheitsmatrix
%der Dimension 2x2.

B=eye(2);

%B ist die Matrix V fuer den Parameter alpha = 0.

A'*A

%Prueft, ob A orthogonal ist. ' transponiert eine Matrix. Sie ist genau dann
%orthogonal, wenn A'*A = eye(2) gilt, und das wird auch
%von der Ausgabe angezeigt. Bemerke aber, dass die logische Aussage
%A'*A = eye(2) falsch ist; dies liegt nur an winzigen Rundungsfehlern.
B'*B

%Auch dies ergibt - trivialerweise - die Identitaet, also sind beide
%Matrizen orthogonal.

%b)
xA = [0;2];
xB = [-sqrt(3);1];

%Initialisiert die Variablen fuer die berechneten Loesungen x.

A*xA
B*xB

%Bestimmt in den jeweiligen Faellen das Produkt der Matrix V mit dem Vektor
%x. Die Ausgabe zeigt jeweils den Vektor [-sqrt(3);1], was verifiziert,
%dass die Loesungen in der Tat korrekt sind.
```

4. Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a) Für welche a, b, c, d ist A regulär?

b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelten Werte von a, b, c, d die Inverse A^{-1}.

a) Nach Satz 2.8 aus dem Buch gilt für jede $n \times n$–Matrix A:

A ist regulär $\Leftrightarrow$ das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.

Also reicht es, die Lösungsmenge von $Ax = 0$ zu betrachten. Wir verwenden den Gauss–Algorithmus:

Fall $a \neq 0$: Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline a & b & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang 1 genau dann, wenn $d - \frac{bc}{a} = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ gilt. Folglich ist die Matrix regulär genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Fall $a = 0$: Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline 0 & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline c & d & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang < 2 genau dann, wenn entweder b oder c Null ist, also wenn $bc = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ gilt. Folglich ist die Matrix regulär genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

b) Sei A regulär, also $ad - bc \neq 0$. Setze $X := A^{-1}$ und benutze die Notationen

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}, e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung $AX = I_2$ folgt, dass $Ax^{(1)} = e^{(1)}$ sowie $Ax^{(2)} = e^{(2)}$ gelten muss. Insofern entspricht $AX = I_2$ einem Gleichungssystem mit zwei rechten Seiten. Wir lösen es mit dem Gauss–Jordan–Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Fall $a \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 + \frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} ad - bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

<u>Fall $a = 0$:</u> Da $ad - bc \neq 0$ gilt, gilt $b \neq 0$ und $c \neq 0$. Es folgt

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} c & 0 & -\frac{d}{b} & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{ad - bc} \left(\begin{array}{cc|cc} ad - bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right).$$

Also gilt auch für $a = 0$:

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$