

Lösungen Serie 14: Ferienserie

1. Finden Sie ein Erzeugendensystem des Lösungsraums $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ des Systems

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Wir schreiben das System als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Lösungsraum finden wir mit Gauss-Elimination:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(E)_1} & \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(E)_2} & \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(E)_3} & \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Wähle $x_5 = \alpha \in \mathbb{R}$. Aus $\frac{6}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = 0$ folgt $x_4 = \frac{x_5}{3} = \frac{\alpha}{3}$. Weiter folgt:

$$\begin{aligned} -x_3 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = 0 &\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{21}\alpha - \frac{6}{21}\alpha = -\frac{\alpha}{3}, \\ -7x_2 + 7x_3 - 10x_4 + 8x_5 = 0 &\Rightarrow x_2 = \frac{1}{7}\left(-\frac{7}{3}\alpha - \frac{10}{3}\alpha + \frac{24}{3}\alpha\right) = \frac{\alpha}{3}, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 &\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{3}\alpha + \frac{3}{3}\alpha = -\alpha \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \left\{ \left(-\alpha, \frac{\alpha}{3}, -\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}, \alpha \right)^\top \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Ein mögliches Erzeugendensystem des Lösungsraums ist also

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

sowie nichttriviale Vielfache davon.

2. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von \mathbb{R}^4 :

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\},$$

$$V := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_1 = x_4\}.$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

a) U ,

b) V ,

c) $U \cap V$.

a) $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$. Man kann also x_1 , x_3 und x_4 als freie Parameter wählen. Damit ist $x_2 = 2x_3 - x_4$. Man kann U also schreiben als

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:a^{(1)}} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:a^{(2)}} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:a^{(3)}}. \end{aligned}$$

Die Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ sind offensichtlich ein Erzeugendensystem für U .

b) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_1 = x_4\}$. Man kann also x_3 und x_4 als freie Parameter wählen. Aus $x_1 = x_4$ folgt: $x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$. Also gilt:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie in **a)** sieht man, dass $b^{(1)}, b^{(2)}$ ein Erzeugendensystem von V bildet mit

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$c) U \cap V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x_2 - 2x_3 + x_4 = 0}_{(i)}, \underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0}_{(ii)}, \underbrace{x_1 = x_4}_{(iii)} \right\}.$$

Es folgt:

$$x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 \stackrel{(ii)}{=} 2x_3 \Rightarrow x_4 \stackrel{(i)}{=} 2x_3 - x_2 = 2x_3 - 2x_3 = 0 \stackrel{(iii)}{\Rightarrow} x_1 = 0.$$

x_3 kann als freier Parameter gewählt werden. Damit folgt:

$$U \cap V = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow c^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Erzeugendensystem von $U \cap V$.

3. Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mit dem Gaußverfahren, ob die Vektoren im \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Betrachte die k Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ im Vektorraum V .
 $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ sind **linear unabhängig**, falls aus $x_1 a^{(1)} + \dots + x_k a^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = \dots = x_k = 0$ gilt. Sonst heissen sie **linear abhängig**.
 Falls jeder Vektor b von V als Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ **erzeugend**.
 In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n = 3$ oder 4) und wir können die Bestimmung von der linearen Abhängigkeit usw. mit Hilfe vom Gaußverfahren systematisieren:

Schreibe $A = (a^{(1)} \dots a^{(k)})$. A ist eine $n \times k$ -Matrix, wobei n die Anzahl Zeilen ist. Mit der Gauss-Schema können wir $r = \text{Rang } A$ finden.

Es gilt: die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ sind:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.
- erzeugend, falls $r = n$.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(E)_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ also } n = 3, k = 2, r = 1.$$

Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r \neq n$ sind sie nicht erzeugend.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(E)_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(E)_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{(E)_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also gilt $n = 4, k = r = 3$. Da $r = k$ sind die Vektoren linear unabhängig und da $r \neq n$ sind sie nicht erzeugend.

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(E)_1} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{(E)_2} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{bmatrix}$$

also $n = k = r = 3$, und damit sind die Vektoren linear unabhängig und erzeugend.

d)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(E)_1} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & -2 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(E)_2} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

also $r = n = 3$, $k = 4$. Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r = n$ sind sie erzeugend.

4. Es seien

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

mit $\binom{x}{0} := 1$ die Binomialpolynome.

- a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$ im Vektorraum aller Polynome linear unabhängig ist.
- b) P_2 bezeichne den Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Zeigen Sie, dass $P_2 = \text{span}\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$.
- c) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ so, dass

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2}$$

gilt, wenn

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Aufgabe c) kann entweder durch direkte Rechnung gelöst werden oder mit Hilfe der diskreten Taylor-Formel, welche für ein Polynom p vom Grad n besagt, dass

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k p(0) \binom{x}{k},$$

wobei $\Delta^0 p(x) := p(x)$, $\Delta^1 p(x) := p(x+1) - p(x)$ und $\Delta^k p(x) := \Delta^1(\Delta^{k-1} p(x))$ die diskreten Differenzenoperatoren sind.

- a) Seien a_0, a_1, a_2 reelle Zahlen mit

$$\begin{aligned} a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2 \frac{x(x-1)}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right)x + \frac{a_2}{2}x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt, dass $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ gelten muss, damit die Gleichung stimmt. Folglich sind die $\binom{x}{i}$ linear unabhängig.

- b) Sei $b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$. Wir suchen reelle Zahlen a_0, a_1, a_2 sodass

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2}$$

gilt. Dies ist (vergleiche mit Teil **a**) äquivalent zu

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right)x + \frac{a_2}{2}x^2.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt, dass die Gleichung für

$$a_2 = 2b_2, \quad a_1 = b_1 + b_2, \quad a_0 = b_0$$

erfüllt ist. Dies zeigt, dass $P_2 = \text{span}\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$ gilt.

c) Aus Teil **b)** folgt, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Bedingung erfüllt.

5.

- a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für \mathbb{R}^3 (Begründung).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 3-c \end{pmatrix}.$$

Wie hängt die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

- a) Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also gelten: $r = k = n = 3$.

$$\begin{array}{|cccccc|} \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(E)_1} \begin{array}{|cccccc|} \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(E)_2} \begin{array}{|cccccc|} \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Wir können also z.B. die Pivot-Vektoren als Basis wählen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir können statt $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ aber auch $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ nehmen, sowie $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- b) Sei U der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des \mathbb{R}^3 . Die Dimension von U ist gleich der Anzahl Vektoren, die in U eine Basis bilden. Schreibe nun

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt:

Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von A ist gleich $r = \text{Rang } A$.

Eine Basis von U kann also höchstens aus r Vektoren bestehen (sonst sind sie nicht mehr linear unabhängig und bilden keine Basis). Es gilt also $d := \dim U \leq r$.

Wegen Satz 4.3 i) aus dem Buch wissen wir zudem, dass mehr als d Vektoren

linear abhängig in U sind. Es folgt also, dass $\dim U = \text{Rang } A$, somit können wir die Dimension von U mit dem Gaussverfahren berechnen.

$$\begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \\ \hline \end{array}$$

Fall $a = b = 0$:

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c \\ 1 & 2 & 3-c \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- Falls $c = 0$, gilt $d = r = 1$,
- falls $c \neq 0$, gilt $d = r = 2$.

Fall $a = 0, b \neq 0$:

- für $c = 0$ gilt

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \text{ also } d = r = 2,$$

- für $c \neq 0$ gilt

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3-c \\ 0 & b & -c \\ 0 & 0 & -c \\ \hline \end{array} \text{ also } d = r = 3.$$

Fall $a \neq 0$:

$$\begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(E)_1} \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 3 + \frac{c}{a} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(E)_2} \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ 0 & 2 & 3 + \frac{c}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{(3a+c)b}{2a} \\ \hline \end{array}$$

- Falls $-\frac{(3a+c)b}{2a} = 0$ (also falls $b = 0$ oder $c = -3a$): $d = r = 2$,
- falls $\frac{(3a+c)b}{2a} \neq 0$: $d = r = 3$.

6. Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$ für \mathbb{R}^3 , wobei

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Betrachten Sie den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie die Koordinaten y_1, y_2, y_3 , die x in der Basis \mathcal{B} beschreiben, d.h.

$$x = y_1 b^{(1)} + y_2 b^{(2)} + y_3 b^{(3)}.$$

b) Sei nun der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, beschrieben durch die Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ in der Basis \mathcal{B} . Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$.

a) Wir suchen y_1, y_2, y_3 so, dass $x = y_1 b^{(1)} + y_2 b^{(2)} + y_3 b^{(3)}$, d.h.

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} &= y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =: Ty. \end{aligned}$$

Löse $x = Ty$ mit Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(II) \pm (I)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(II) \leftrightarrow (III)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow y_3 = -1, y_2 = -2, y_1 = 4.$$

b) Sei v bezüglich der Basis \mathcal{B} durch die Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ dargestellt. Es folgt:

$$v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie den Rang von A .
- b) Ermitteln Sie eine Basis für den von den Spaltenvektoren erzeugten Unterraum von \mathbb{R}^4 . Bestimmen Sie die Koordinaten der Spaltenvektoren in dieser Basis.

Wir wenden den Gauss-Algorithmus auf die Matrix A^T an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -7 & -7 \\ -3 & -4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)-3(I), (III)-(I), (IV)+2(I), (V)+3(I)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(III)-2(II), (IV)-(II), (V)+(II)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Folglich gilt $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) = 2$.
- b) Wir können die Pivot-Zeilen von A^T als Basis des betrachteten Vektorraumes wählen, d. h.

$$\mathcal{B} = \{b_1 := (1, 1, 2, 3)^T, b_2 := (3, 4, 3, 8)^T\}.$$

Aus den Schritten des Gauss-Verfahrens können wir ablesen, dass in der Basis \mathcal{B}

$$\begin{aligned} (1, 3, -4, 1)^T - b_1 - 2(b_2 - 3b_1) &= 0 \Leftrightarrow (1, 3, -4, 1)^T = -5b_1 + 2b_2, \\ (-2, -1, -7, -7)^T + 2b_1 - (b_2 - 3b_1) &= 0 \Leftrightarrow (-2, -1, -7, -7)^T = -5b_1 + b_2, \\ (-3, -4, -3, -8)^T + 3b_1 + (b_2 - 3b_1) &= 0 \Leftrightarrow (-3, -4, -3, -8)^T = -b_2 \end{aligned}$$

gilt.

8. Durch die Polynome

$$\begin{aligned}p_1(t) &= t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \\p_2(t) &= t^3 + 6t - 5 \\p_3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1 \\p_4(t) &= 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5\end{aligned}$$

wird ein Vektorraum V erzeugt. Bestimmen Sie $\dim(V)$ und eine Basis von V .

Die entsprechende Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus findet man

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt $\dim(V) = \text{rang}(A) = 2$ und eine mögliche Basis ist diejenige, die den nichttrivialen Zeilen der reduzierten Matrix entspricht:

$$\mathcal{B} = \{t^3 - 2t^2 + 4t + 1, t^2 + t - 3\}.$$

9.

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3 - 6a & -6 + 5a \end{pmatrix}.$$

b) Für welche Werte des Parameters a besitzt die Matrix eine Inverse?

Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man Gauss-Schritte ausführt. Wir bringen A also in Zeilenstufenform mit dem Gaussverfahren:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3 - 6a & -6 + 5a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 2 - 6a & -4 + 5a \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6a & 6 + 5a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 + a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Determinante dieser Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente, also $180 + 30a$. A hat eine Inverse für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$, denn eine Matrix ist genau dann invertierbar wenn die Determinante nicht Null ist.

10. Gegeben sei ein Gleichungssystem mit dem reellen Parameter α :

$$\begin{aligned} (2 - \alpha)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_2 - (2 - \alpha)x_3 &= -4 \\ (3 - \alpha)x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Für welche α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele, keine Lösung? Zu denjenigen α , für die das Gleichungssystem lösbar ist, bestimme man die Lösungsmenge.

Die Determinante der zum Gleichungssystem gehörenden Matrix ist $(2 - \alpha)(2 - 5\alpha + \alpha^2)$ - man entwickle z.B. nach der ersten Spalte. Das System ist genau dann eindeutig lösbar wenn die Determinante ungleich Null ist, also $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, \frac{1}{2}(5 + \sqrt{17}), \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17})\}$ und die Lösung ist $x_1 = x_2 = -\frac{2+\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2}, x_3 = \frac{8-4\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2}$. Es bleiben die Fälle in denen die Determinante Null ist, also keine oder unendlich viele Lösungen zu erwarten sind. Setzt man $\alpha = 2$ ein, so sieht man leicht, dass x_1 beliebig sein kann - also unendlich viele Lösungen existieren - und $x_2 = 1, x_3 = 0$ gelten muss. Für die restlichen Werte von α existieren keine Lösungen - die zweite und dritte Gleichung werden unverträglich.

11. Für welche reellen Werte von s und t hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + sy + s^2z &= 1 \\ s^2x + y + 2tz &= 1 \\ sx + s^2y + z &= t \end{aligned}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge.

Die Determinante der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & 2t \\ s & s^2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $1 - 2s^3 + s^6 = (1 - s^3)^2$. Dieses Polynom hat nur $s = 1$ als reelle Nullstelle. Für $s \neq 1$ ist die eindeutige Lösung $z = \frac{t-s}{1-s^3}$, $y = \frac{1-s^2-s^3+2st+s^4t-2t^2}{(1-s^3)^2}$, $x = \frac{1-s+s^4-3s^2t+2st^2}{(1-s^3)^2}$. Falls $s = 1$ gilt, so liefern die erste und dritte Gleichung $t = 1$ (für $s = 1$ und $t \neq 1$ existieren also keine Lösungen) und die unendlich vielen Lösungen sind $z = 0$, $y = 1 - x$, wobei x beliebig ist.

12. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -2 \\ -7x_1 - 3x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

Es gibt genau eine Lösung: $x = -\frac{5}{2}$, $y = \frac{17}{4}$, $z = \frac{9}{4}$.

13. Welche Beziehungen zwischen b_1, b_2, \dots, b_5 müssen erfüllt sein, damit das folgende System lösbar ist?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_2 + 2x_3 &= b_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= b_4 \\ x_1 + x_3 &= b_5 \end{aligned}$$

Beispielsweise sind die unteren drei Gleichungen unabhängig, daher bestimmen b_3, b_4, b_5 eindeutig eine Lösung und legen somit auch die Werte für b_1 und b_2 fest. Durch Addition der dritten und vierten Gleichung erhält man $b_1 = b_3 + b_4$ und durch Subtraktion der dritten vom dreifachen der vierten erhält man $b_2 = 3b_4 - b_3$.

14. Auf einem geschlossenen Metalldraht werden an 4 Punkten die Temperaturen x_1, x_2, x_3, x_4 gemessen. Dabei ist die Temperatur in einem der Punkte jeweils gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturen der beiden benachbarten Punkte.

- a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3, x_4 auf.
 b) Bestimmen sie die Lösungsmenge davon.

Das Gleichungssystem in Matrixschreibweise lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen sind $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, die Temperatur ist also konstant.

15. Geben Sie für s und t Bedingungen an, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + sx_2 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + sx_3 &= t \end{aligned}$$

- a) keine Lösung,
 b) genau eine Lösung,
 c) unendlich viele Lösungen

besitzt. Bestimmen Sie die entsprechenden Lösungsmengen.

Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist $2s - 2$. Also haben wir genau eine Lösung wenn $s \neq 1$ und zwar $x_1 = \frac{st+2s-4}{2s-2}, x_2 = \frac{2-t}{2s-2}, x_3 = -x_2$. Ist nun $s = 1$, so erhält man als Verträglichkeitsbedingung $t = 2$ und in diesem Fall sind die Lösungen $x_1 \in \mathbb{R}$ und $x_2 = 2 - x_1, x_3 = x_1 - 2$. Für $s = 1$ und $t \neq 2$ gibt es keine Lösung.

16. Der sogenannte **Massenausgleich zweiter Ordnung** (Link zu Animationen) einer k -Zylindermaschine liefert für die Impulse (I_1) , (I_2) und die Momente (M_1) , (M_2) der ersten und zweiten Ordnung folgende Bedingungen:

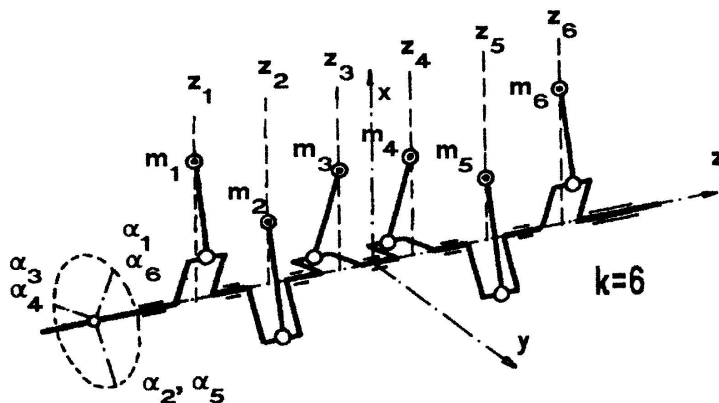
$$\sum_{i=1}^k m_i \sin \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i \cos \alpha_i = 0 \quad (I_1)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i \sin 2\alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i \cos 2\alpha_i = 0 \quad (I_2)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i z_i \sin \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos \alpha_i = 0 \quad (M_1)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i z_i \sin 2\alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos 2\alpha_i = 0 \quad (M_2)$$

Dabei bezeichnen α_i die Kurbelwinkel und $m_i > 0$ die Massen. Wir nehmen weiter an, dass der Massenschwerpunkt in $z = 0$ liegt, dass $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und dass $k > 1$.



a) Wie lautet die Matrix A des homogenen linearen Gleichungssystems, das die Vektoren $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)^T$ und $\vec{M} = (z_1 m_1, \dots, z_k m_k)^T$ erfüllen müssen? Warum ist \vec{M} nie ein Vielfaches von \vec{m} ? Welchen Rang darf A bei Massenausgleich höchstens haben?

b) Bestimmen Sie A und $\text{Rang}(A)$ und lösen Sie $Ax = 0$ für die zwei Fälle:

- 4-Zylinder mit Zündfolge 1-3-4-2, $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 180^\circ$.
- 6-Zylinder mit Zündfolge 1-5-3-6-2-4, $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 120^\circ$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 240^\circ$.

Ist in beiden Fällen Massenausgleich möglich?

c) Gibt es für den üblichen Aufbau einer 4-Zylindermaschine

$$m_1 = \dots = m_4 = m, \quad z_1 = -z_4 = 3z_2 = -3z_3$$

Kurbelwinkel α_i , so dass Massenausgleich zweiter Ordnung vorliegt?

a) Mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_k) \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \dots & \cos(\alpha_k) \\ \sin(2\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \dots & \sin(2\alpha_k) \\ \cos(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_2) & \dots & \cos(2\alpha_k) \end{pmatrix}$$

lauten die Gleichungssysteme $A\vec{m} = 0$, $A\vec{M} = 0$, wobei hier 0 der Nullvektor in \mathbb{R}^4 ist.

Angenommen \vec{M} sei ein Vielfaches von \vec{m} , so gilt $\lambda\vec{m} = \begin{pmatrix} \lambda m_1 \\ \lambda m_2 \\ \vdots \\ \lambda m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 m_1 \\ z_2 m_2 \\ \vdots \\ z_k m_k \end{pmatrix} =$

\vec{M} und somit $z_1 = z_2 = \dots = z_k = \lambda$ (weil alle $m_i \neq 0$) - ein Widerspruch zur Annahme $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$.

Der Rang der Matrix A darf höchstens gleich $k - 2$ sein (diese Bedingung ist automatisch erfüllt sobald $k \geq 6$, da der Rang höchstens 4 sein kann). Wäre $\text{Rang}(A) = k$, so hätte das Gleichungssystem $A\vec{m} = 0$ nur die Lösung $\vec{m} = 0$, was wegen $m_i > 0$ nicht sein kann. Wäre $\text{Rang}(A) = k - 1$, so gäbe es nur eine linear unabhängige Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$, daher wären \vec{m} und \vec{M} linear abhängig - wir haben oben gezeigt, dass dem nicht so ist.

b) 4-Zylinder: A ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, in Zeilenstufenform also z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Lösungen für $A\vec{m} = 0$ sind somit von der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

wegen der Bedingung $m_i > 0$ existieren also keine zulässigen Lösungen und somit kein Massenausgleich 2. Ordnung.

6-Zylinder: Die Matrix A und eine mögliche Zeilenstufenform lauten

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen des homogenen Systems sind

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und man erhält einen Massenausgleich z.B. mit $\vec{m} = m(1, 1, 1, 1, 1, 1)^\top$, $\vec{M} = m(z_1, z_2, z_3, -z_3, -z_2, -z_1)^\top$.

c) Die Gleichungen lauten

$$m (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4)) = 0 \quad (1)$$

$$m (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4)) = 0 \quad (2)$$

$$mz_3 (-3 \sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3 \sin(\alpha_4)) = 0 \quad (3)$$

$$mz_3 (-3 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3 \cos(\alpha_4)) = 0. \quad (4)$$

Wir kürzen die Faktoren vor den Klammern weg und setzen $\alpha_1 = 0$. (1)+(3) und (2)+(4) ergeben dann $\sin(\alpha_3) = -2 \sin(\alpha_4)$ (5) und $\cos(\alpha_3) = 1 - 2 \cos(\alpha_4)$ (6). Quadrieren und addieren von (5) und (6) ergibt

$$1 = (-2 \sin(\alpha_4))^2 + (1 - 2 \cos(\alpha_4))^2 = 5 - 4 \cos(\alpha_4) \Rightarrow \cos(\alpha_4) = 1 \Rightarrow \alpha_4 = 0.$$

Setzt man dies in (6) ein erhält man $\alpha_3 = \pi = 180^\circ$ und mit (2) schliesslich $\alpha_2 = \pi = 180^\circ$. Somit gibt es keinen Massenausgleich 2. Ordnung (siehe b)).