

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Name	
Vorname	
Leginummer	

1	2	3	4	5	Punkte	Note

Schauen Sie das Prüfungsblatt (Rückseite und folgende) erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt! Gehen Sie vor Prüfungsbeginn folgende Punkte in Ruhe durch:

- Tragen Sie Name, Vorname und Leginummer oben ein.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex. Legen Sie sich am besten nur erlaubtes Schreibzeug zurecht.

Beachten Sie während der Prüfung:

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe). Nicht begründete Lösungen ergeben keine Punkte!
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch!
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle fünf Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

AbgabeprozEDURE:

- Sobald die Prüfungszeit abgelaufen ist oder wenn Sie vorzeitig abgeben möchten, verstauen Sie bitte dieses Deckblatt, das Aufgabenblatt und alle weiteren Blätter, die Sie abgeben wollen, im Kuvert. Das Kuvert bitte nicht zukleben und auch nicht beschriften.

Viel Erfolg!

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
\times	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, -1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Sei V ein Vektorraum und seien $u, v \in V$. Der Durchschnitt aller Unterräume von V , die u und v enthalten, ist gleich $\text{span}\{u, v\}$.		
b) Sei $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $F\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $F\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dann ist $F\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.		
c) Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + 1 \right\}$ ist ein Unterraum von \mathbb{R}^2 .		
d) Die Funktion $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear genau dann wenn $n = 1$ gilt.		
e) Sei A eine $n \times m$ Matrix, derart dass $Ax = c$ für alle $c \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine Lösung hat. Dann ist $\text{Rang}(A) = m$.		
f) Sei A eine Matrix mit charakterischem Polynom $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$. Dann ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.		
g) Seien v_1, v_2, v_3 Vektoren so dass die drei Paare $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$ und $\{v_1, v_3\}$ linear unabhängig sind. Dann sind $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.		
h) Jede schiefsymmetrische 3×3 -Matrix ist singulär.		
i) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wenn $A^2 = B^2$, dann gilt entweder $A = B$ oder $A = -B$.		
j) Sei \mathcal{P}_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Ist $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von \mathcal{P}_2 , dann ist $\{p'_1(x), p'_2(x), p'_3(x)\}$ eine Basis von \mathcal{P}_1 .		
Ist $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von \mathcal{P}_2 , dann ist $\{p'_1(x), p'_2(x), p'_3(x)\}$ ein Erzeugendensystem von \mathcal{P}_1 .		

D

Bitte wenden!

2. [10 Punkte] Sei C der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $V \subset C$ der Unterraum erzeugt von

$$\mathcal{B} = \{\cos(x), \sin(x), 1, x, x^2\}.$$

\mathcal{B} ist eine Basis von V .

- a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[L]_{\mathcal{B}}$ der linearen Abbildung

$$L: V \rightarrow V, \quad f(x) \mapsto f(x) + f'(x) + f''(x)$$

bezüglich \mathcal{B} in der oben gegebenen Reihenfolge.

- b) [3 Punkte] Finden Sie die Eigenwerte von $[L]_{\mathcal{B}}$. Ist $[L]_{\mathcal{B}}$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

- c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge $S \subset V$ der Differentialgleichung $Lf(x) = \sin(x) + x$.

- d) [3 Punkte] Beweisen Sie, dass \mathcal{B} tatsächlich eine Basis von V ist.

Hinweis: Werten Sie die Funktionen in \mathcal{B} in den Punkten $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$ aus.

3. [10 Punkte] Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = -3x_1^2 + 8x_1x_3 + x_2^2 + 3x_3^2.$$

- a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A , sodass $q(x) = x^{\top}Ax$ ist.

- b) [4 Punkte] Eine Quadrik Q ist gegeben durch die Gleichung $q(x) = 4$. Bringen Sie die Quadrik durch eine Hauptachsentransformation $x = Ty$ auf Normalform, und geben Sie dabei auch T explizit an.

- c) [4 Punkte] Bestimmen Sie, welche der Hauptachsen die Quadrik Q nicht schneidet, und begründen Sie Ihre Antwort.

4. [10 Punkte] Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_3' &= -4y_1 + 2y_3. \end{aligned}$$

- a) [1 Punkt] Schreiben Sie das System in der Form $y' = Ay$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenvektoren von A .

- c) [5 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$, und lösen Sie das Anfangswertproblem, $y(0) = (0, 0, 1)^{\top}$.

5. [10 Punkte] Auf $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sei das folgende Skalarprodukt gegeben¹:

$$\langle A, B \rangle := \text{Spur}(AB^\top).$$

- a) **[3 Punkte]** Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.
- b) **[2 Punkte]** Sei V die Teilmenge von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ bestehend aus allen Matrizen mit Spur gleich Null:

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \text{Spur}(A) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist, und dass die Matrizen

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis \mathcal{B} von V bilden.

- c) **[3 Punkte]** Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf \mathcal{B} in der gegebenen Reihenfolge an, um eine Orthonormalbasis \mathcal{B}' von V zu erhalten.
- d) **[2 Punkte]** Betrachten Sie die lineare Abbildung $F: V \rightarrow V$ definiert durch $A \mapsto AB_1 - B_1A$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich \mathcal{B} .

¹Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.