

# Lösungen zur Prüfung Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. **[Prüfung A]** Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind,  $-1$  falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und  $0$  falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf  $0$  auf.

	wahr	falsch
a) Es seien $v_1, v_2$ zwei Eigenvektoren der Matrix $A$ . Dann ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor von $A$ .		×
b) Sei $A$ eine diagonalisierbare Matrix. Dann ist auch $A^2$ diagonalisierbar.	×	
c) Für zwei $n \times n$ -Matrizen $A, B$ gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$ genau dann, wenn $A$ und $B$ den Eigenwert $0$ mit der selben algebraischen Vielfachheit besitzen.		×
d) Sei $A$ eine $n \times n$ -Matrix und $b$ ein Eigenvektor von $A$ . Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung.		×
e) Wenn eine Matrix $A$ invertierbar ist, so ist auch $A^\top$ invertierbar.	×	
Wenn eine Matrix $A$ diagonalisierbar ist, so ist auch $A^\top$ diagonalisierbar.	×	
f) Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \{0\}$ .		×
Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \{0\}$ .	×	
g) Der Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad $\leq 2$ hat genau 3 verschiedene Unterräume der Dimension 2.		×
h) Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ haben die selben Eigenwerte.	×	
i) Durch $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.		×
Durch $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_2 + x_2 y_1$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.		×
j) Die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ regulär.	×	

A

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

- a) **[6 Punkte]** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$ . Geben Sie weiter eine diagonale Matrix  $D$  und eine Matrix  $T$  an, so dass  $D = T^{-1}AT$  gilt.
- b) **[1 Punkt]** Ist  $A$  invertierbar?
- c) **[3 Punkte]** Kann man eine orthogonale Matrix  $T$  finden, welche  $D = T^{-1}AT$  erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & -8 \\ 0 & 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)((5-\lambda)(-7-\lambda) + 32) = (-3-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda+3) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte lauten also  $\lambda_1 = 1$  (algebraische Vielfachheit 1) und  $\lambda_2 = -3$  (algebraische Vielfachheit 2).

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 1$ :

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 \text{ ist frei, } x_2 = 2x_3, x_1 = x_2 - x_3 = x_3.$$

Mit der Wahl  $x_3 = 1$  erhalten wir den Eigenvektor  $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$\lambda_2 = -3$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1, x_3 \text{ sind frei, } x_2 = x_3.$$

Mit der Wahl  $x_1 = 1, x_3 = 0$  erhalten wir den Eigenvektor  $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Mit der Wahl  $x_1 = 0, x_3 = 1$  erhalten wir den Eigenvektor  $v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Damit erfüllen die Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Gleichung  $D = T^{-1}AT$ .

- b) Da 0 kein Eigenwert von  $A$  ist, ist  $A$  invertierbar.
- c) Ein solches  $T$  kann man nicht finden.  $T$  enthält in den Spalten die Eigenvektoren von  $A$  und damit  $T$  orthogonal ist, müssten diese eine orthonormale Basis bilden. Dies ist nur dann möglich, wenn die Eigenräume senkrecht aufeinander stehen,  $v^{(1)}$  müsste also senkrecht auf  $v^{(2)}$  und  $v^{(3)}$  stehen. Dies ist aber nicht der Fall.

3. Sei  $\mathcal{P}_2$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Sei weiter  $\beta \in \mathbb{R}$  und

$$F : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad p(x) \mapsto p(x) + \beta x p'(x) - 2x p''(x)$$

eine lineare Abbildung.

- [2 Punkte]** Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von  $F$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .
- [1 Punkt]** Für welche  $\beta \in \mathbb{R}$  ist  $F$  diagonalisierbar?
- [4 Punkte]** Bestimmen Sie für die  $\beta$  aus b) eine Basis von Eigenvektoren von  $F$ .
- [3 Punkte]** Bestimmen Sie, für welche  $\beta$  aus b) die Gleichung  $F(p(x)) = x$  eine Lösung  $p \in \mathcal{P}_2$  besitzt und geben Sie im Existenzfall alle solchen Lösungen an.

- a) Die Spalten der Darstellungsmatrix  $[F]_{\mathcal{B}}$  sind die Bilder der Basis  $\mathcal{B}$  unter  $F$ . Also:

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 + 0 + 0 = 1, \\ F(x) &= x + \beta x + 0 = (1 + \beta)x, \\ F(x^2) &= x^2 + \beta x(2x) - 2x(2) = -4x + (1 + 2\beta)x^2. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \beta & -4 \\ 0 & 0 & 1 + 2\beta \end{pmatrix}.$$

- b) Da  $[F]_{\mathcal{B}}$  eine Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Für  $\beta \neq 0$  haben wir also 3 verschiedene Eigenwerte und  $F$  ist diagonalisierbar. Für  $\beta = 0$  haben wir hingegen 1 als 3-fachen Eigenwert. Damit die Matrix diagonalisierbar wäre, müssten wir 3 linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 1 finden, also müsste die Matrix  $[F]_{\mathcal{B}} - I_3$  die Nullmatrix sein. Dies ist aber nicht der Fall.

Insgesamt gilt:  $F$  ist für  $\beta \neq 0$  diagonalisierbar.

- c) Sei also  $\beta \neq 0$ . Die Eigenwerte kennen wir bereits, diese sind  $1, 1 + \beta, 1 + 2\beta$ .

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren von  $[F]_{\mathcal{B}}$ :

$\lambda_1 = 1$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -4 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta \neq 0} x_3 = x_2 = 0, x_1 \text{ ist frei.}$$

Mit der Wahl  $x_1 = 1$  erhalten wir den Eigenvektor  $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$\lambda_2 = 1 + \beta$ :

$$\begin{pmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta \neq 0} x_3 = x_1 = 0, x_2 \text{ ist frei.}$$

**Bitte wenden!**

Mit der Wahl  $x_2 = 1$  erhalten wir den Eigenvektor  $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$\lambda_2 = 1 + 2\beta$ :

$$\begin{pmatrix} -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta \neq 0} x_3 \text{ ist frei, } x_2 = -\frac{4x_3}{\beta}, x_1 = 0.$$

Mit der Wahl  $x_3 = \beta$  erhalten wir den Eigenvektor  $v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \beta \end{pmatrix}$ .

Eine Basis aus Eigenvektoren von  $F$  ist somit  $\{1, x, -4x + \beta x^2\}$ .

- d) Für  $\beta \neq 0$  haben wir oben die Eigenvektor-Basis  $\mathcal{B}'$  berechnet. Die Gleichung  $F(p(x)) = x$  ist in der Basis  $\mathcal{B}'$  das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $a, b, c \in \mathbb{R}$  die Koordinaten von  $p(x)$  in der Basis  $\mathcal{B}'$  sind.

Damit gilt  $a = 0$ . Für  $\beta \neq -\frac{1}{2}$  folgt  $c = 0$  und für  $\beta = -\frac{1}{2}$  ist  $c$  frei. Für  $\beta \neq -1$  ist  $b = \frac{1}{1+\beta}$ , während es für  $\beta = -1$  keine Lösung gibt. Zusammen gilt

$$\begin{aligned} \beta \notin \left\{ 0, -1, -\frac{1}{2} \right\} &\Rightarrow p(x) = \frac{1}{1+\beta}x \\ \beta = -1 &\Rightarrow \text{keine Lösung} \\ \beta = -\frac{1}{2} &\Rightarrow p(x) = \frac{1}{1+\beta}x + c(-4x + \beta x^2) \\ &= 2x - c \left( 4x + \frac{1}{2}x^2 \right), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Sei

$$q(x) = x_1^2 + \sqrt{2} \cdot 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

eine quadratische Form mit  $x = (x_1, x_2)^\top$ .

- a) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie eine symmetrische, reelle Matrix  $A$ , so dass  $q(x) = x^\top Ax$  gilt.
- b) **[6 Punkte]** Führen Sie die Hauptachsentransformation  $y = Tx$  durch.
- c) **[3 Punkte]** Skizzieren Sie die Menge  $Q = \{x \mid q(x) = 0\}$  im  $y$ -Koordinatensystem der Hauptachsen.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Die Eigenwerte lauten also  $\lambda_1 = 5$  (algebraische Vielfachheit 1) und  $\lambda_2 = -1$  (algebraische Vielfachheit 1).

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 5$ :

$$\begin{pmatrix} -4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 \text{ ist frei, } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2.$$

Mit der Wahl  $x_2 = \sqrt{2}$  erhalten wir den Eigenvektor  $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

Da die Eigenvektoren orthogonal sein müssen, ist ein Eigenvektor zu  $\lambda_2 = -1$  gegeben durch  $v^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ . Beide Eigenvektoren haben Länge  $\sqrt{3}$ .

Damit gilt für  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  und  $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$  die Beziehung  $D = S^\top AS$ . Somit liefert die Hauptachsentransformation  $y = S^\top x = Tx$

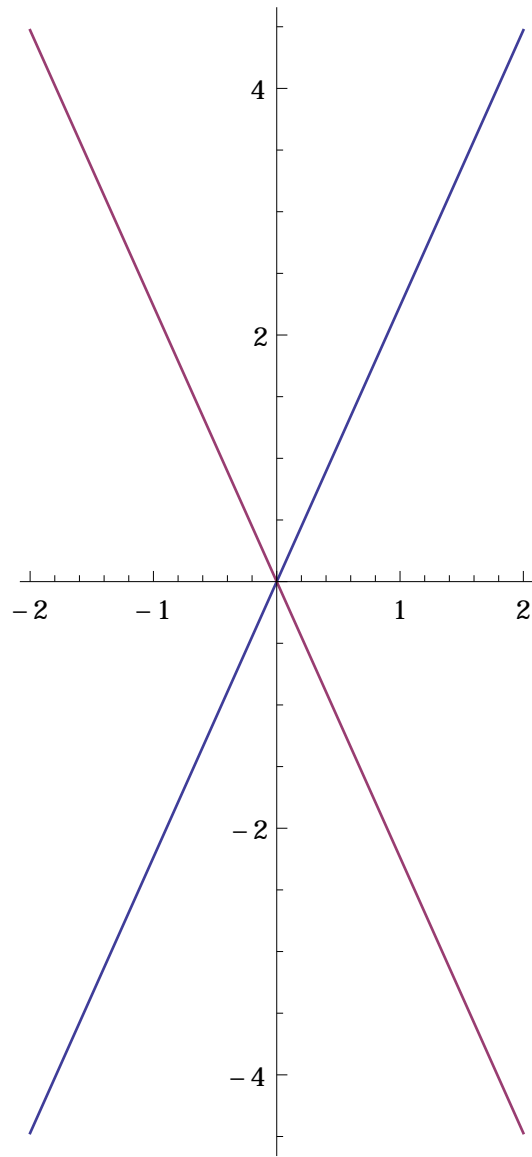
$$q(x) = x^\top Ax = (Sy)^\top A(Sy) = y^\top S^\top ASy = y^\top Dy = 5y_1^2 - y_2^2.$$

c)

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow 5y_1^2 - y_2^2 = 0 \Leftrightarrow 5y_1^2 = y_2^2 \Leftrightarrow y_2 = \pm\sqrt{5}y_1.$$

Geometrisch ist das ein Geradenpaar, welches sich im Punkt  $(0, 0)$  schneidet. Die Geraden haben die Steigungen  $\sqrt{5}$  bzw.  $-\sqrt{5}$  (bezüglich der Hauptachsen).

**Bitte wenden!**



**Siehe nächstes Blatt!**

5. Wir betrachten den Unterraum

$$U = \text{span} \left\{ (1, 0, 1, 0)^\top, (2, 2, 2, 1)^\top \right\}$$

von  $\mathbb{R}^4$ .

- a) **[3 Punkte]** Wir bezeichnen mit  $U^\perp$  alle Vektoren von  $\mathbb{R}^4$ , welche senkrecht auf  $U$  stehen. Bestimmen Sie  $U^\perp$ !
- b) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von  $\mathbb{R}^4$  bezüglich des Standardskalarproduktes, welche ausschliesslich Vektoren aus  $U$  resp.  $U^\perp$  enthält.
- c) **[2 Punkte]** Geben Sie die Orthogonalprojektion von  $x = (5, 1, -2, 0)^\top$  auf  $U$  an.
- d) **[2 Punkte]** Geben Sie die Orthogonalprojektion von  $x = (5, 1, -2, 0)^\top$  auf  $U^\perp$  an.

a) Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass  $x_3$  und  $x_4$  frei sind und dass  $x_1 = -x_3$  und  $x_2 = -\frac{1}{2}x_4$  gilt. Wir erhalten

$$U^\perp = \text{span} \left\{ (1, 0, -1, 0)^\top, (0, 1, 0, -2)^\top \right\}.$$

- b) Per Konstruktion stehen die Vektoren aus  $U$  senkrecht auf den Vektoren aus  $U^\perp$ . Somit müssen wir mit dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren nur noch je die beiden Basisvektoren orthogonalisieren und alle 4 Vektoren normieren.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_2 - \langle \tilde{u}_2, u_1 \rangle \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

**Bitte wenden!**

$$\tilde{u}_4 - \underbrace{\langle \tilde{u}_4, u_3 \rangle}_{=0} \cdot u_3 = \tilde{u}_4 \Rightarrow u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die gesuchte Basis

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

c) Wir rechnen

$$\begin{aligned} x_U &= \langle x, u_1 \rangle u_1 + \langle x, u_2 \rangle u_2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Entweder gehen wir analog wie in c) vor oder sehen, dass

$$x_{U^\perp} = x - x_U = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{2} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$