

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Name	
Vorname	
Leginummer	

1	2	3	4	5	Punkte	Note

Schauen Sie das Prüfungsblatt (Rückseite und folgende) erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt! Gehen Sie vor Prüfungsbeginn folgende Punkte in Ruhe durch:

- Tragen Sie Name, Vorname und Leginummer oben ein.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex. Legen Sie sich am besten nur erlaubtes Schreibzeug zurecht.

Beachten Sie während der Prüfung:

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe). Nicht begründete Lösungen ergeben keine Punkte!
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch!
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle fünf Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

AbgabeprozEDURE:

- Sobald die Prüfungszeit abgelaufen ist oder wenn Sie vorzeitig abgeben möchten, verstauen Sie bitte dieses Deckblatt, das Aufgabenblatt und alle weiteren Blätter, die Sie abgeben wollen, im Kuvert. Das Kuvert bitte nicht zukleben und auch nicht beschriften.

Viel Erfolg!

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt, unbeantwortete Fragen ergeben 0 Punkte. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein —wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen a_{ij} , so dass $a_{ij} = 1$ wenn $i + j = n + 1$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Dann gilt $A = A^{-1}$.		
b) Seien $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Polynome mit $p(0) = 0 < q(0)$, $p(1) > 0 = q(1)$. Dann sind p, q linear unabhängig.		
c) Es gibt Matrizen $B \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$, so dass das Produkt $BC \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ vollen Rang (also Rang 4) hat.		
d) Seien x, y zwei Zeilenvektoren in \mathbb{R}^n . $\text{Rang}(xy^\top)$ ist genau dann gleich 0, wenn mindestens einer der Vektoren der Nullvektor ist.		
e) Die Summe zweier Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ist nie ein Eigenvektor.		
f) Zwei Einheitsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn entweder $v + w = 0$ oder $v - w = 0$.		
g) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $c, d \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $Ax = c$ und y eine Lösung von $By = d$, so ist $x + y$ eine Lösung von $(A + B)z = c + d$.		
h) Hat die symmetrische 2×2 -Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte strikt grösser als Null, so ist die Lösungsmenge von $(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ eine Ellipse in \mathbb{R}^2 .		
i) Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Gilt $PP = P$, so folgt $\text{im}(P) = E_1$, wobei $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n Px = x\}$ ist und $\text{im}(P)$ das Bild von P bezeichnet.		
j) Für jede quadratische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $E_1 \subset \text{im}(P)$, wobei $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n Px = x\}$ ist und $\text{im}(P)$ das Bild von P bezeichnet.		

A

Bitte wenden!

2. [10 Punkte] Gegeben seien die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- a) [3 Punkte] Finden Sie zwei verschiedene Basen von \mathbb{R}^3 , die aus drei der obigen fünf Vektoren bestehen.
- b) [3 Punkte] Geben Sie eine nicht triviale Linearkombination $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5$ dieser Vektoren an (also verschieden von $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$), welche Null ergibt.
- c) [1 Punkt] Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, deren Bild von den Vektoren a_1 und a_2 aufgespannt wird.
- d) [3 Punkte] Finden Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, deren Kern von den Vektoren a_1 und a_4 aufgespannt wird.

3. [10 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = -5y(t) + 4y'(t). \quad (*)$$

- a) [3 Punkte] Verwandeln Sie (*) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?
 - b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in a) gefundenen Systems an.
 - c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von (*) zu den Bedingungen $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
4. [10 Punkte] Nicht alle der folgenden Abbildungen a)–d) sind linear. Geben Sie für jede Abbildung entweder die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis an oder zeigen Sie, dass die Abbildung nicht linear ist. Bestimmen Sie zudem, welche der Darstellungsmatrizen orthogonal sind.

- a) [2 Punkte] $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, orthogonale Projektion auf den Unterraum $\text{span}\{(1, 1)^\top\}$;
- b) [2 Punkte] $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, Rotation um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn um den Punkt $(1, 1)^\top$;
- c) [3 Punkte] $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, Projektion auf die untere Halbebene, also

$$(x, y)^\top \mapsto \begin{cases} (x, 0)^\top, & \text{falls } y > 0 \\ (x, y)^\top, & \text{sonst;} \end{cases}$$

- d) [3 Punkte] $f_4: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Rotation um 180 Grad um die z -Achse, gefolgt von einer Spiegelung an der x - y -Ebene.

Siehe nächstes Blatt!

- 5. [10 Punkte]** Sei $C([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und V der Untervektorraum aufgespannt von den Vektoren $\mathcal{B} := \{1, \sin, \cos\}$. Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x)q(x) dx.$$

- a) [5 Punkte]** Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf \mathcal{B} an, um eine Orthonormalbasis $\hat{\mathcal{B}}$ zu erhalten.

Hinweis: Es gilt $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

- b) [2 Punkte]** Finden Sie die Matrix T , welche Koordinaten bezüglich \mathcal{B} auf Koordinaten bezüglich der Basis $\hat{\mathcal{B}}$ aus a) abbildet, also die Übergangsmatrix von \mathcal{B} nach $\hat{\mathcal{B}}$.

- c) [3 Punkte]** Projizieren Sie das Polynom $p(x) = x$ orthogonal auf den Unterraum V .