

Basisprüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede unkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

1. Gegeben seien zwei Matrizen A und B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$, mit $n > 1$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- (b) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.
- (c) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
- (d) Es gilt $\det(A) = -\det(A^\top)$.

Bitte wenden!

2. Betrachten Sie den Vektorraum \mathcal{F} der Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten sind die Unterräume $\mathcal{P}_n(x)$ der Polynome mit $\text{Grad} \leq n$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- (a) Es gibt zwei linear unabhängige Polynome $p(x), q(x)$, derart dass die Polynome $xp(x)$ und $xq(x)$ linear **abhängig** sind.
- (b) Sinus und Cosinus sind linear abhängige Vektoren in \mathcal{F} .
- (c) Die Sinusfunktion ist Element von \mathcal{F} ($\sin \in \mathcal{F}$), aber liegt in keinem der Unterräume \mathcal{P}_n ($\sin \notin \mathcal{P}_n$).
- (d) Die Abbildung $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(1) + 1$ ist linear.

3. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Für welche reellen Zahlen x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

- (a) $x_1 = 1, x_2 = 1$.
- (b) $x_1 = 0, x_2 = -2$.
- (c) $x_1 = 0, x_2 = 2$.
- (d) $x_1 = -1, x_2 = -1$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Gegeben seien die folgenden Unterräume von \mathbb{R}^4 :

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

$$V := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \text{ und } x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(a) $\dim(U \cap V) = 1.$

(b) Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $V = \text{Kern } A$.

(c) Für die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $U = \text{Bild } B$.

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des Unterraums $U + V$.

5. \mathcal{P}_3 sei der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 . Auf \mathcal{P}_3 sei das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

gegeben. Wählen Sie eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $\text{span}\{1, x^3\}$.

(a) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{7}}{4}(x^3 - 1) \right\}$

(b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}x^3 \right\}$

(c) $\{1, x^3\}$

(d) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, x^3 \right\}$

Bitte wenden!

6. Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

- (a) $-1, 3, 5$
- (b) $-1, 0$
- (c) $-1, 4$
- (d) $-1, -7, -5$

7. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

- (a) $(0, 1, 1)^\top$
- (b) $(-1, -1, 1)^\top$
- (c) $(1 - i, 1 + i, 2)^\top$
- (d) $(1, 0, 1)^\top$

8. Eine Basis des Bildes von

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 5 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

9. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 5 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

10. Sei $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Vektorraum der reellen 2×2 -Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen von V ist ein Untervektorraum?

(a) $U = \{A \in V \mid A \text{ ist halbeinfach}\}$

(b) $U = \{A \in V \mid A^\top = A^{-1}\}$

(c) $U = \{A \in V \mid \det(A) = 0\}$

(d) $U = \{A \in V \mid \text{Spur}(A) = 0\}$

Siehe nächstes Blatt!

11. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- (a) Für jede $m \times n$ -Matrix A mit $n \geq m$ gibt es eine $m \times m$ -Matrix B derart, dass $\text{Bild } A = \text{Bild } B$ ist.
- (b) Die Menge der $n \times n$ -Matrizen A , welche $\dim(\text{Bild } A) = \dim(\text{Kern } A)$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.
- (c) Sei A eine Matrix mit charakterischem Polynom $p_A(\lambda)$. Dann stimmt $\dim(\text{Bild } A)$ überein mit dem Grad von p_A .
- (d) Für jeden 2-dimensionalen Unterraum U von \mathbb{R}^3 gibt es eine Matrix A mit $\text{Bild}(A) = U = \text{Kern}(A)$.

12. Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{aligned}y_1'' &= y_1 + y_2' \\y_2'' &= y_1' \\y_3' &= y_1' + y_2'\end{aligned}$$

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 5
- (d) 6

13. Welche der folgenden Matrizen ist weder halbeinfach noch einfach?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -8 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. Sei \mathcal{P}_3 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 . Betrachte die Abbildung $\mathcal{F}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$, $p(x) \mapsto 2p(x) - p'(x) + p''(x) - 2p(0)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(a) \mathcal{F} ist keine lineare Abbildung.

(b) \mathcal{F} hat den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1.

(c) \mathcal{F} ist invertierbar.

(d) \mathcal{F} hat den Eigenwert 2 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

15. Sei A eine Matrix mit $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt...

- (a) $A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$.
- (b) Es gibt nicht genug Information, um $A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.
- (c) $\det(A) \neq 0$.
- (d) $\text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = y \right\}$.

16. Sei $V := \mathbb{R}^n$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V . Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (a) Es gibt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V derart, dass $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ gilt für alle $v \in V$.
- (b) Falls $\|\cdot\|$ durch $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| := |x_1| + \dots + |x_n|$ definiert wird, dann wird $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert.
- (c) Die Menge $U := \{v \in V \mid \|v\| = 0\}$ bildet einen Unterraum von V mit Dimension > 0 .
- (d) Sei $\|\cdot\|'$ eine andere Norm auf V . Dann konvergiert eine Folge in V gegen $v \in V$ bezüglich $\|\cdot\|$ genau dann, wenn die Folge gegen v bezüglich $\|\cdot\|'$ konvergiert.

17. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- (a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^2 ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.
- (b) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.
- (c) $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.
- (d) Man kann beliebig viele paarweise orthogonale Vektoren in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V finden.

18. In \mathbb{R}^3 seien die linearen Abbildungen F_1, F_2 und F_3 wie folgt definiert:

F_1 : Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$,

F_2 : Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um die x_1 -Achse,

F_3 : Drehung um $\frac{\pi}{4}$ um die x_3 -Achse.

Sei \mathcal{B} die Standardbasis von \mathbb{R}^3 , und definiere die Darstellungsmatrizen $A_i := [F_i]_{\mathcal{B}}$ für $i = 1, 2, 3$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- (a) $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.
- (b) Für alle i und alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle F_i(v), F_i(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 bezeichnet.
- (c) Die Darstellungsmatrix von $F_2 \circ F_1$ bezüglich \mathcal{B} ist gleich $A_1 A_2$.
- (d) 1 ist **kein** Eigenwert von $A_2 A_3$.

Siehe nächstes Blatt!

19. Sei V ein Vektorraum und

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

eine Norm auf V . Welche der folgenden Aussagen gilt nicht im Allgemeinen?

- (a) $\forall v \in V: \|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- (b) $\forall v, w \in V: \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.
- (c) $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}: \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.
- (d) $\forall v, w \in V: \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

20. Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ definiere eine Abbildung $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, z \mapsto Az$. Dann gilt:

- (a) A hat eine Basis von Eigenvektoren.
- (b) Die geometrische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 2.
- (c) Die Menge der Eigenwerte von A und $(A^\top)^{-1}$ sind gleich.
- (d) Die algebraische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 2.

21. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ \beta & 1 & 1 - \alpha \\ -\beta & 2 - \beta & -1 + \alpha \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- a) **[2 Punkte]** Welche Bedingungen müssen α und β erfüllen, damit die Matrix A invertierbar ist?
- b) **[6 Punkte]** Finden Sie eine Basis für das Bild von A in Abhängigkeit der Parameter α und β .
- c) **[2 Punkte]** Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist 0 ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit 2? Bestimmen Sie für diese α und β eine Basis von Kern A .

Bitte wenden!

22. [10 Punkte] Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto q(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A , sodass $q(x) = x^\top Ax$ ist.

b) **[6 Punkte]** Ein Kegelschnitt Q ist gegeben durch

$$q(x) + a^\top x = 0, \text{ wobei } a^\top = (6, -6).$$

Bringen Sie den Kegelschnitt durch eine Hauptachsentransformation $x = Ty$ und eine Translation auf Normalform, und geben Sie dabei auch T explizit an.

c) **[2 Punkte]** Ist die quadratische Form q positiv definit, negativ definit oder indefinit? Begründen Sie Ihre Antwort.

23. [10 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $y' = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) **[4 Punkte]** Finden Sie die Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenvektoren von A .

b) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie die allgemeine **reelle** Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$, und lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = (0, 0, 1)^\top$.

c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \rightarrow -\infty$ (Vorsicht: *minus* ∞).