

Basisprüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede unkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

1. Sei A eine lineare Abbildung und v ein Vektor. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , so ist $-3v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert ...

- (a) -3λ
- (b) 3λ
- (c) λ
- (d) $-3v$ ist kein Eigenvektor.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Seien A und B Darstellungsmatrizen von F . Welche der folgenden Aussagen stimmt **nicht** in allgemein?

- (a) A und B haben dasselbe charakterische Polynom.
- (b) A und B haben dasselbe Spektrum.
- (c) A und B haben denselben Kern.
- (d) A und B haben dieselbe Spur.

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $(A^{-1})^\top$ sind ...

- (a) $-3, 2$ und -6 .
- (b) $3, -2$ und 6 .
- (c) $-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$.
- (d) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$.

4. Welche Aussage zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ passt nicht zu den anderen?

- (a) $\dim \text{Kern}(A) = 2$.
- (b) Es gibt zwei Pivot-Variablen.
- (c) $\dim \text{Bild}(A) = 1$.
- (d) $\text{Rang}(A) = 2$.

Siehe nächstes Blatt!

5. Für welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist $\langle x, y \rangle := x^\top A y$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 ?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

6. Was hat eine Matrix stets mit all ihren Potenzen gemeinsam?

(a) Die Eigenwerte.

(b) Die Eigenvektoren.

(c) Den Rang.

(d) Die Determinante.

7. Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -8 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

- (a) 3, 7, 5
- (b) 3, -8, 1
- (c) 2, 6, 7
- (d) 0, 7

8. Für eine Matrix A existiere ein $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, derart dass $A^k = 0$ gilt. Was lässt sich daraus für A schliessen?

- (a) Alle Eigenwerte von A sind 0.
- (b) A hat 0 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k .
- (c) $\dim \text{Bild}(A) = 0$.
- (d) A ist diagonalisierbar.

9. Was gilt für die Eigenwerte einer Drehmatrix¹ $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

- (a) Sie sind reell.
- (b) Sie sind alle positiv, das heisst R ist positiv definit.
- (c) Mindestens einer davon ist gleich 1.
- (d) Mindestens einer davon ist gleich 0.

¹ R ist orthogonal mit $\det R = 1$.

10. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

(a) $(0, 1, 1)^\top$

(b) $(1, 2, 1)^\top$

(c) $(1, 1, 1)^\top$

(d) $(1, 0, 1)^\top$

11. Eine Basis des Bildes von

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

wird gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

12. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -23 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

13. Sei $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Vektorraum der reellen 2×2 -Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen von V ist ein Untervektorraum?

(a) $U = \{A \in V \mid A \text{ ist diagonalisierbar}\}$

(b) $U = \{A \in V \mid \det(A) = 1\}$

(c) $U = \left\{ A \in V \mid A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \right\}$

(d) $U = \{A \in V \mid A^\top = -A\}$

Siehe nächstes Blatt!

14. Welche Aussage trifft auf jede symmetrische reelle Matrix zu?

- (a) Die Spalten sind orthonormale Einheitsvektoren.
- (b) Alle Einträge ausser diejenigen auf der Diagonalen sind null.
- (c) Die Matrix ist diagonalisierbar.
- (d) Die Matrix ist invertierbar.

15. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit charakterischen Polynomen $p_A(x)$ bzw. $p_B(x)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt mit Sicherheit?

- (a) Ist $f(x)$ ein Polynom, derart dass $f(A) = 0$ ist, dann gilt $f = p_A$.
- (b) Wenn $p_A(x) = p_B(x)$ ist, dann sind A und B ähnlich.
- (c) Wenn p_A eine Nullstelle mit Vielfachheit > 1 hat, dann hat A keine Eigenbasis.
- (d) Wenn A invertierbar ist, dann gilt $p_{AB}(x) = p_{BA}(x)$.

16. Welche der folgenden Aussagen ist für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ richtig?

- (a) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch $A + B$ diagonalisierbar.
- (b) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch AB diagonalisierbar.
- (c) Ist A halbeinfach, so auch A^2 .
- (d) Sei v ein Eigenvektor von A , und sei w ein Eigenvektor von B . Dann ist $v + w$ ein Eigenvektor von $A + B$.

Bitte wenden!

17. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- (a) Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = e^{ax}$.
- (b) Sei $\omega \neq 0$. Dann ist $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.
- (c) Sind y_1 und y_2 unterschiedliche von Null verschiedene Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$, dann sind sie linear unabhängig.
- (d) $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ sind Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 1$.

18. Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{aligned}y_1'' &= y_1 + y_2' \\ y_2''' &= y_1'\end{aligned}$$

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 5
- (d) 6

19. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) $x_1^2 + x_2$ ist eine quadratische Form.
- (b) $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.
- (c) $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.
- (d) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $q(x_1, x_2) := (x_1, x_2)^\top A(x_1, x_2)$ eine quadratische Form und der durch $q(x_1, x_2) = 1$ definierte Kegelschnitt eine Ellipse.

Siehe nächstes Blatt!

20. Seien S_I und S_H die Lösungsräume einer linearen, (echt) inhomogenen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) $S_I \cap S_H$ ist leer.
- (b) $S_H \cap S_I = \{0\}$.
- (c) $S_H \cap S_I$ ist ein Vektorraum.
- (d) $0 \in S_H \cap S_I$.

21. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von A . Geben Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.
- b) **[1 Punkt]** Finden Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass $T^{-1}AT = D$ gilt.
- c) **[2 Punkte]** Kann die Matrix T in b) orthogonal gewählt werden? Begründen Sie ihre Antwort. Wenn ja, geben Sie ein solches T an.
- d) **[3 Punkte]** Berechnen Sie $(A^{-1})^4$.

22. [10 Punkte] Sei V der von den Funktionen $\{1, x, x^2, e^x\}$ aufgespannte Vektorraum mit dem Unterraum $U := \text{Span}\{1, x, x^2\}$. Für zwei Funktionen $f, g \in V$ sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0).$$

- a) **[3 Punkte]** Verifizieren Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.
- b) **[2 Punkte]** Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf der Basis $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$ von U **in der gegebenen Reihenfolge** an, um eine Orthonormalbasis $\hat{\mathcal{B}}$ von U zu erhalten.
- c) **[2 Punkte]** Vervollständigen Sie $\hat{\mathcal{B}}$ zu einer Orthonormalbasis $\hat{\mathcal{C}}$ von V .
- d) **[3 Punkte]** Sei $\pi: V \rightarrow V$ die Orthogonalprojektion auf U . Sei $\mathcal{C} = \{c_1 := 1, c_2 := x, c_3 := x^2, c_4 := e^x\}$. Was ist die Darstellungsmatrix $[\pi]_{\mathcal{C}}$ von π bezüglich der Basis \mathcal{C} ?

23. [10 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = -8y(t) + 4y'(t). \tag{*}$$

- a) **[2 Punkte]** Verwandeln Sie (*) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?
- b) **[6 Punkte]** Geben Sie die allgemeine reelle Lösung des in a) gefundenen Systems an.
- c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Lösung von (*) zu den Bedingungen $y(0) = 1, y(\pi/4) = 1$.