2.1. Abbildungen

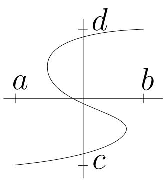
(a) Existieren injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

(i) von $\{0, 11, 111\}$ nach $\{0, 1\}$?

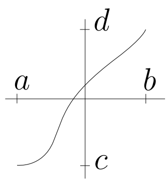
(ii) von $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\}$ nach $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n^3 \leq 100\}$?

(iii) von $\{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ in das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$?

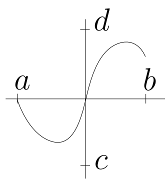
(b) Sind die folgenden Abbildungen Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$? Ist diese Funktion, sofern sie existiert, surjektiv, injektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.



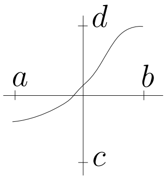
(i) Abb 1



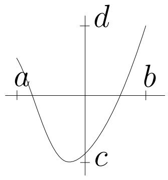
(ii) Abb 2



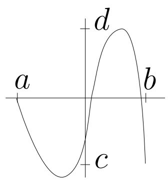
(iii) Abb 3



(iv) Abb 4



(v) Abb 5



(vi) Abb 6

2.2. Bild und Urbild

Seien X und Y Mengen und betrachten Sie eine Abbildung $f : X \to Y$. Für eine gegebene Teilmenge B von Y ist das *Urbild von B unter f* die Teilmenge $f^{-1}(B)$ von X, die durch die Formel

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

gegeben ist.

Für eine gegebene Teilmenge A von X kann man analog den Begriff des *Bilds von A unter f* definieren: sie ist die Teilmenge $f(A)$ von Y, die durch die Formel

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

geben ist.

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(c) Zeigen Sie, dass $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, aber im Allgemeinen $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

2.3. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist surjektiv,

(iii) g ist injektiv,

(iv) g ist surjektiv,

(v) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(b) Eine reelle Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) fg ist gerade.

(ii) fg ist ungerade.

(iii) fg^2 ist gerade.

(iv) $f + g$ ist gerade.

(c) Die Umkehrfunktion (Inverse) von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^4$ ist...

(i) $x^{\frac{1}{4}}$.

(ii) existiert nicht.

(iii) $\frac{1}{4}x$.

(iv) x^{-4}.

(v) $-x^4$.