3.1. Arithmetisches, Geometrisches, Harmonisches und Quadratisches Mittel

Es seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Wann tritt Gleichheit ein?

3.2. Komplexe Zahlen

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform, d.h. in die Form $a+bi$ mit a, b reell:

(a) $(3+2i)(6-5i)$

(b) $\frac{1}{1+i}$

(c) $\frac{3+4i}{2-i}$

(d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

(e) $\overline{(1+i)^2} + (1+i)^2$

(f) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

3.3. Quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$

Es seien $z = a+bi, w = c+di$ komplexe Zahlen mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass:

$$z^2 = w,$$

äquivalent ist zu folgenden Gleichungen:

$$a^2 - b^2 = c, \quad 2ab = d.$$

(b) Zeigen Sie, dass wenn $z^2 = w$, dann gilt $|w| = a^2 + b^2$.

(c) Wenn $z^2 = w$, beweisen Sie, dass a und b die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c). \tag{1}$$

(d) Beweisen Sie, dass reelle Zahlen a, b existieren, sodass (1) erfüllt ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass jede nicht-negative Zahl eine Wurzel hat.

(e) Wenn a, b die Gleichungen (1) erfüllen, zeigen Sie, dass auch $a^2 - b^2 = c$ sowie $(2ab)^2 = d^2$ gelten.

(f) Folgern Sie, durch geschickte Wahl der Vorzeichen von a, b, dass zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl z existiert, sodass $z^2 = w$

3.4. Maximum

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen, ob diese ein Maximum besitzen oder nicht. Falls ja, was ist das Maximum?

(i.) $[0, 2[$

(ii.) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(iii.) $\mathbb{Q} \cap \,]0, 1[$

(iv.) $\mathbb{N} \cap [-100, 105.5[$

3.5. Supremum und Infimum

Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und wir definieren:

$$-A := \left\{ -a \;\middle|\; a \in A \right\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A$$

3.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv?

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) := xyz$.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := (x + y, x + y)$.

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := (x + y, x - y)$.

(b) Bestimmen Sie das Maximum der Menge A definiert wie folgt:

$$A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup]2, 4[$$

(i) Existiert nicht.

(ii) 1

(iii) 4

(iv) $+\infty$

(c) Was für eine geometrische Form hat die folgende Menge:

$$M := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c - 1| = 2 \right\}?$$

(i) Ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1, -2), (-1, 2), (3, -2)$ und $(3, 2)$

(ii) Ein Geradenabschnitt vom Punkt $(-1, 0)$ zu $(3, 0)$

(iii) Ein Kreis mit Mittelpunkt in i und Radius 2

(iv) Ein Kreis mit Mittelpunkt in 1 und Radius 2