5.1. Häufungspunkte Explizit Bestimmen

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der folgenden Folgen reeller Zahlen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := (-1)^n$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{(1+(-1)^n)n^3}{n^2-n+1}$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

Hinweis: Ein *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Zahl, welche der Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

5.2. Unendlich viele Häufungspunkte

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch die folgende Formel:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N} : 2^k \leq n < 2^{k+1} \;\Rightarrow\; a_n := \frac{n-2^k}{2^k}$$

Als Beispiel, hier sind die ersten Folgeglieder:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{4}, a_6 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{3}{4}, \ldots$$

Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0, 1]$ ist.

5.3. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

5.4. Quotientenkriterium

(a) Es sei $(a_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen Sie an, dass eine reelle Zahl $0 \leq c < 1$ sowie eine natürliche Zahl N existieren, sodass:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c, \quad \forall n \geq N$$

Zeigen Sie, dass die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent ist.

(b) Beweisen Sie mittels der Aussage aus der ersten Teilaufgabe, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

5.5. Bedingte Konvergenz

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

(i.) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und konvergiert gegen 0.

(ii.) Alle Partialsummen der Folge $(b_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt durch eine gemeinsame Schranke $C > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big| \leq C$$

Wir wollen zeigen, dass die Reihe:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$$

konvergiert.

(a) Definieren wir $s_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$ die Partialsummen von (b_n) sowie $s_0 = 0$, dann zeigen Sie die folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (s_k - s_{k-1})$$

(b) Folgern Sie hieraus, dass folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n a_n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k (a_k - a_{k+1})$$

(c) Beweisen Sie, dass die Folge $c_n := s_n a_n$ eine Nullfolge ist.

(d) Wir definieren nun:

$$\forall n \in \mathbb{N} : d_n := \sum_{k=0}^{n-1} s_k (a_k - a_{k+1})$$

Beweisen Sie, dass (d_n) eine Cauchy-Folge ist.

Hinweis: Setzen Sie die Summen in $|d_n - d_m|$ für $n \geq m \in \mathbb{N}$ ein und verwenden Sie die Dreiecksungleichung. Was kann man über das Vorzeichen von $a_k - a_{k+1}$ aussagen?

(e) Schliessen Sie nun daraus, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergiert.

5.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wenn die Folge (a_n) konvergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(b) Wenn die Folge (a_n) divergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(c) Eine Folge (a_n) mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(d) Eine beschränkte Folge (a_n), welche nicht konvergiert, hat mindestens zwei Häufungspunkte.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.