7.1. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\pi} \frac{x^2-\pi x+3}{x^2+\pi^2}$,

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-\pi x+3}{x^2+\pi^2}$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+x}{x^3+x^2+x+1}$,

(d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2+x}{x^3+x^2+x+1}$,

(e) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{|x|+e} - \sqrt{-x}\right)$,

(f) $\lim_{x\to-\infty} \left(e^2 + \sqrt{|x|+e} - \sqrt{-x}\right)^2$,

(g) $\lim_{x\to100} (x-100)\sin\left(\frac{1}{x-100}\right)$.

(h) $\lim_{x\to1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ für alle Paare $n, m \in \mathbb{N}$

Hinweis: Bemerken Sie, dass $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \ldots x + 1)$.

7.2. Maximum und Minimum von Funktion

Es sei:

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{6x^2+x}{x^3+x^2+x+1}$$

Bestimmen Sie, ob die Funktion ein Maximum und/oder Minimum annimmt.

Hinweis: Was können Sie sagen, wenn f auf $[1, b]$ für ein $b > 1$ stets grösser bzw. kleiner ist als auf dem Intervall $[b, +\infty[$? Was ist mit den Maxima und Minima?

7.3. Stetigkeit für Funktionen auf $\mathbb{C}$

Es sei für die gesamte Aufgabe $f : I \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine allgemeine Funktion. Wir erinnern uns an die allgemeine Definition der Stetigkeit: Eine Funktion f ist stetig in einem Punkt $x_0 \in I$ genau dann, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(a) Beweisen Sie, dass zwei Funktionen $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ existieren, sodass:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)i, \quad \forall x \in I$$

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in $x_0 \in I$ ist, wenn f_1 und f_2 stetig in x_0 sind.
Hinweis: Schätzen Sie $|f_1(x) - f_1(x_0)|$ durch $|f(x) - f(x_0)|$ ab.

(c) Finden Sie eine stetige Funktion $f : [0,1] \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, aber sodass f den Wert $1/2$ nicht annimmt.
Hinweis: Dies zeigt, dass eine direkte Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes nicht gelten kann.

(d) Verallgemeinern und beweisen Sie Proposition 3.2.10 für Funktionen f wie in der Aufgabenstellung.

(e) Verallgemeinern und beweisen Sie Proposition 3.2.8 für Funktionen f wie in der Aufgabenstellung.
Hinweis: Unter Verwendung der Verallgemeinerung von Prop. 3.2.10 lassen sich die Aussagen aus Prop. 2.5.9 folgern.

7.4. Funktionalgleichung

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass:

$$f(x) = f(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweisen Sie, dass f eine konstante Funktion ist.

Hinweis: Definieren Sie einen geeignete rekursive Folge mit beliebigem Startwert.

7.5. Normale Konvergenz

Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen auf den gegebenen Definitionsmengen normal konvergieren. Ist die Grenzfunktion stetig?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ auf $\mathbb{R}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ auf $\mathbb{R}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+x^2}$ auf $\mathbb{R}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^2}}{n^2}$ auf $[0,1]$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3-(x+1)^3+3x^2+3x+1}{\sqrt{n}}$ auf $[0,1]$

7.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Man nehme an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergente Folgen von Funktionen $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktionen f, g sind. Wählen Sie alle korrekten Antworten aus:

(i) $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $f + g$

(ii) $(f_n g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen fg

(iii) Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n + g_n)$ gleichmässig gegen $f + g$

(iv) Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmässig gegen fg

(v) Alle Aussagen sind inkorrekt

(b) Man nehme an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergente Folgen von Funktionen $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktionen f, g sind. Wählen Sie alle korrekten Antworten aus:

(i) $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $f + g$

(ii) $(f_n g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen fg

(iii) Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n + g_n)$ gleichmässig gegen $f + g$

(iv) Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmässig gegen fg

(v) Alle Aussagen sind inkorrekt

(c) Betrachten Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sowie:

$$f_n(x) := (x - \frac{1}{n})^2, \quad \forall x \in [0,1]$$

Bestimmen Sie, gegen welche Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Folge konvergiert und ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(i) $f(x) = 1$ und die Konvergenz ist gleichmässig

(ii) $f(x) = 1$ und die Konvergenz ist nicht gleichmässig

(iii) $f(x) = x^2$ und die Konvergenz ist gleichmässig

(iv) $f(x) = x^2$ und die Konvergenz ist nicht gleichmässig

(v) Es existiert ein $x \in [0,1]$, sodass die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert

(d) Betrachten Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sowie:

$$f_n(x) := \frac{1}{n}x^2 + 1, \quad \forall x \in [0,1]$$

Bestimmen Sie, gegen welche Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Folge konvergiert und ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(i) $f(x) = 1$ und die Konvergenz ist gleichmässig

(ii) $f(x) = 1$ und die Konvergenz ist nicht gleichmässig

(iii) $f(x) = x^2$ und die Konvergenz ist gleichmässig

(iv) $f(x) = x^2$ und die Konvergenz ist nicht gleichmässig

(v) Es existiert ein $x \in [0,1]$, sodass die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert