8.1. Konvergenzradius

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir wollen den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe bestimmen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(a) Nehmen wir an, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: q,$$

wobei q eine nicht-negative reelle Zahl ist. Beweisen Sie mittels des Wurzelkriteriums aus Serie 6, dass die Potenzreihe absolut konvergiert für $|x| < 1/q$.

(b) Zeigen Sie nun, dass die Potenzreihe absolut divergiert, falls $|x| > 1/q$.

(c) Folgern Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $1/q$ ist.

(d) In Serie 5 begegnete uns das Quotientenkriterium. Beweisen Sie folgende alternative Formel für den Konvergenzradius analog zu den obigen Schritten: Wir nehmen an, es gelte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q,$$

wobei q eine nicht-negative reelle Zahl ist. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe oben $1/q$ ist.

(e) Bestimmen Sie die Konvergenzradii der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} x^n$ für $k \in \mathbb{N}$

Hinweis: Es ist $x^{n^2} = x^{(n^2)}$ und nicht $(x^n)^2$.

8.2. Gleichmässige Konvergenz vs. Normale Konvergenz

Betrachten Sie die folgende Folge von Funktionen:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1/2] : f_n(x) := \frac{x^n}{n}$$

(a) Beweisen Sie, dass die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

nicht normal auf $[-1, 1/2]$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge der Partialsummen $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch:

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in [-1, 1/2],$$

gleichmässig auf $[-1, 1/2]$ konvergiert

Hinweis: Benutzen Sie die Abschätzungen aus Beispiel 2.10.9, insbesondere lassen Sie $n \to \infty$ für u_n oder v_n in einer der Gleichungen zu (2).

8.3. Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

Wir definieren in Analogie zum Sinus und Cosinus die folgenden Funktionen:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

für alle $x \in \mathbb{C}$.

(a) Drücken Sie sinh und cosh durch sin und cos aus.

(b) Beweisen Sie in Analogie zum Sinus und Cosinus die folgende Identität:

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

(c) Bestimmen Sie die Potenzreihen-Darstellung von sinh und cosh. Wie gross ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihen?

(d) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\forall x \in \mathbb{C} : \sinh(-x) = -\sinh(x), \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

(e) Beweisen Sie, dass sinh bijektiv auf $\mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie anschliessend die Umkehrfunktion.

Hinweis: Es kann helfen, zuerst die Ersetzung $y = e^x$ zu benutzen. Lösen Sie anschliessend mit dem Logarithmus auf.

8.4. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert normal auf $\mathbb{R}$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Ich weiss nicht.

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert gleichmässig auf $\mathbb{R}$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Ich weiss nicht.

(c) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Die Reihe $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konvergiert normal auf $\mathbb{R}$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Ich weiss nicht.