

9.1. Gleichungen in \mathbb{C}

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen in Polarkoordinatenform über \mathbb{C} :

(a) $z^3 = 1$

(b) $z^2 - 2iz - 1 = i$

Hinweis: Schreiben Sie hier die Lösung in der Form $z = z_0 + re^{i\varphi}$ für geeignetes $z_0 \in \mathbb{C}$.

(c) $z^5 = 1 + i$

(d) $z^5 = 2z$

9.2. Tangenten an Graph

Bestimmen Sie die Tangente an den Graph der gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x) := \sin(x)$ mit $x_0 = 0$

(b) $f(x) := x^2$ mit $x_0 = 3$

(c) $f(x) := e^x$ mit $x_0 = 1$

(d) $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ mit $x_0 = -1$

Hinweis: Schreiben Sie die Tangenten in der folgenden Form:

$$y = m(x - x_0) + q,$$

wobei $m, q \in \mathbb{R}$. Beachten Sie hierzu Definition 5.1.3.

9.3. Ableitungen der hyperbolischen Funktionen

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\cosh'(x) = \sinh(x),$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x).$$

(b) Berechnen Sie mithilfe von Teil a) die Ableitung von $\tanh(x)$ gegeben durch:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(c) Bestimmen Sie mittels Proposition 5.1.6.(5) die Ableitung von $\sinh^{-1}(x)$.

9.4. Rechenregeln für Ableitungen

Argumentieren Sie, warum die folgenden Funktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Ableitungen:

- | | |
|--|---|
| (a) $\log(\sin(x))$ für $x \in (0, \pi)$, | (e) $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$ für $x \in (4, \infty)$, |
| (b) a^x für $x \in \mathbb{R}$ und ein $a \in (0, \infty)$, | (f) $\log(\cosh(x))$ für $x \in \mathbb{R}$, |
| (c) x^x für $x \in (0, \infty)$, | (g) $\log(\log(\log(x)))$ für $x \in (e, \infty)$, |
| (d) $9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, | (h) $3^x x^3$ für $x \in \mathbb{R}$. |

9.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Ableitungen ist korrekt?

- (i) $(\log(2x))' = 2 \log(x) \frac{1}{x}$.
- (ii) $(\exp(\sin(x)))' = \cos(x) \exp(\sin(x))$.
- (iii) $(\sqrt{\sin(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}}$.

(b) Welche der Funktionen unten hat die folgende Ableitung?

$$\frac{1}{1+x^2}$$

- (i) $\log(1+x^2)$
- (ii) $\sinh^{-1}(x)$
- (iii) $\tan^{-1}(x)$

(c) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (i) f ist stetig $\iff f$ ist differenzierbar.
- (ii) f ist stetig $\implies f$ ist differenzierbar.
- (iii) f ist stetig $\longleftarrow f$ ist differenzierbar.