10.1. Abschätzungen aus Ableitungen, Teil 1

Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion, sodass Zahlen $k, K \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$kf(x) \leq f'(x) \leq Kf(x), \quad \forall x \in]0, 1[$$

(a) Es sei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Berechnen Sie die Ableitung von $g(x) := f(x)e^{-Cx}$.

(b) Betrachten Sie nun f wie in der Aufgabenstellung. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$f(0)e^{kx} \leq f(x) \leq f(0)e^{Kx}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Hinweis: Verwenden Sie Korollar 5.3.7 (Monotonie-Kriterium) sowie die erste Teilaufgabe mit geeigneter Wahl des C.

(c) Falls $k = K$, d.h.:

$$f'(x) = Kf(x), \quad \forall x \in]0, 1[,$$

folgern Sie, dass $f(x) = f(0)e^{Kx}$.

Hinweis: Dies ist die erste Differentialgleichung in diesem Kurs, weitere folgen später in Analysis 2.

10.2. Abschätzungen aus Ableitungen, Teil 2

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\frac{2}{\pi}x < \sin(x), \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

(a) Beweisen Sie, dass es genügt, die folgende Ungleichung:

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

zu zeigen, wobei $g(x) := \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$ für alle $x \in [0, \pi/2]$.

(b) Bestimmen Sie das Minimum von g mittels des Ableitungskriteriums und den Randwerten.

Hinweis: g erreicht sicher ein Minimum auf $[0, \pi/2]$. Weshalb? Wir weisen darauf hin, dass das Minimum auch in 0 oder $\pi/2$ angenommen werden kann und dort das Ableitungskriterium für Extremalstellen fehlschlägt, vergleiche mit dem Beispiel $h(x) := x^2$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Man bemerke, dass mittels des Monotonie-Kriteriums bestimmt werden kann, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

(c) Nutzen Sie die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgabe, um die gesuchte Ungleichung zu beweisen.

10.3. Newton-Verfahren

Diese Aufgabe gibt ein Beispiel, wie man Nullstellen approximieren kann für beliebige, hinreichend differenzierbare Funktionen. Für diese Aufgabe betrachten wir:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := e^x - 2$$

(a) Beweisen Sie mittels Zwischenwertsatz, dass f eine Nullstelle in $[0,1]$ besitzt.

(b) Für ein beliebiges $x_0 \in [0,1]$, bestimmen Sie die Tangente $t_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t_{x_0}(x) = m(x - x_0) + q$ zu f im Punkt x_0.

Hinweis: Betrachten Sie Aufgabe 9.2 in Serie 9.

(c) Man nehme an, dass $f(x_0) \neq 0$ (andernfalls hätten wir die Nullstelle bereits bestimmt). Für ein gegebenes $x_0 \in [0,1]$, lösen Sie die folgende Gleichung für $x \in [0,1]$:

$$t_{x_0}(x) = 0$$

Vergleichen Sie die Formel mit Example 5.4.11.2) im Skript.

Hinweis: Prüfen Sie, dass die Nullstelle tatsächlich in $[0,1]$ liegt. Dies kann mittels Bestimmen des Maximum und Minimum einer geeigneten Funktion erreicht werden.

(d) Wir definieren nun die folgende Iteration: Es sei $x_1 = 1$ und für $n \geq 2$ definieren wir x_n als die Nullstelle von $t_{x_{n-1}}$ in $[0,1]$, also:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Zeigen Sie, dass $e^{x_n} \geq 2$. Folgern Sie hieraus, dass die Folge monoton fallend ist.

Hinweis: Beweisen Sie, dass $f(x) \geq t_{x_0}(x)$ für alle $x, x_0 \in [0,1]$ analog zu Schnellübung 5.4.

(e) Folgern Sie, dass die Folge konvergiert mit Grenzwert $\log(2)$.

(f) Bestimmen Sie die Folgeglieder x_2, x_3, x_4 und x_5 auf 4 Nachkommastellen genau und vergleichen Sie die Ergebnisse mit $\log(2)$.

10.4. Ableitungen höherer Ordnung

Bestimmen Sie für die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) := \frac{1}{x} e^{2x}$$

alle Ableitungen $f^{(k)}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

10.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$2 \geq f'(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.