## 11.1. Höhere Ableitungen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungen bis und mit 4-ter Ordnung, d.h. $f', f''.f'''$ sowie $f^{(4)}$:

**(a)** $f(x) := \cos(x)e^{\sin(x)}$

**(b)** $f(x) := \log(1 + x^2)$

**(c)** $f(x) := e^x \cos(x) - x\sin(x)$

## 11.2. Konvexität

**(a)** Welche der folgenden Funktionen sind konvex? Wenn sie nicht konvex sind, auf welchem Teilintervall des Definitionsbereiches sind sie konvex?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \log(1 + x^2)$
- $f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}, f(x) := \log(x)^2$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \max\{x^2, -x^2\}$

**(b)** Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen in $C^2(I)$ und $I$ ein offenes Intervall. Man nehme an, dass $f$ und $g$ beide konvex sind. Zeigen Sie, dass $fg$ nicht konvex sein muss.

**(c)** Es seien $f, g$ wie in der letzten Teilaufgabe. Nehmen Sie an, dass $f, g \geq 0$ beide monoton wachsend sind. Ist dann $fg$ konvex?

## 11.3. Konvexität und Tangenten

**(a)** Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und konvex. Man beweise, dass für alle $x < y < z \in I$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

**Hinweis:** Eine Skizze kann helfen. Versuchen Sie, die Ungleichungen durch Reduktion auf die Definition der Konvexität zu beweisen.

**(b)** Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass $f$ genau dann konvex ist, wenn für alle $x, x_0 \in I$ gilt:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**Hinweis:** Zeigen Sie mittels der vorherigen Teilaufgabe, dass $f'$ monoton wachsend ist und eine geeignete Abschätzung bezüglich den Steigungen zulässt.

### 11.4. Taylorpolynome

Bestimmen Sie für jede der Funktionen in Aufgabe 11.1 das Taylorpolynom zur Ordnung 4 um $x = 0$.

### 11.5. Grenzwerte und Taylorpolynome

Taylorpolynome stellen ein wichtiges Hilfsmittel bei der Bestimmung von einigen Grenzwerten dar: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1+2x^2}{x\sin(x)^3}$
- $\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}}$

**Hinweis:** Für den letzten Grenzwert ist eine geschickte Umformung nötig. Warum ist diese erlaubt? Verwenden Sie Taylorpolynome wie in Example 5.7.10.

### 11.6. Online-MC

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online auf Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 3 der Funktion $f$ im Punkt 0?

$$f(x) := xe^x$$

**(i)** $x + x^2 + 1/2x^3$

**(ii)** $x + x^2 + x^3$

**(iii)** $1 + x + x^2 + 1/2x^3$

**(iv)** $1 + x + x^2 + x^3$

**(b)** Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion $f$ im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)$$

**(i)** $(x-1) + 1/2(x-1)^2 - 1/6(x-1)^3 + 1/12(x-1)^4$

**(ii)** $(x-1) + 1/2(x-1)^2 - 1/3(x-1)^3 + 1/6(x-1)^4$

**(iii)** $(x-1) + 1/2(x-1)^2 - 1/3(x-1)^3 + 1/4(x-1)^4$

**(iv)** $(x-1) + 1/2(x-1)^2 - 1/6(x-1)^3 + 1/3(x-1)^4$

**(c)** Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion $f$ im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)^4$$

**(i)** $0$

**(ii)** $(x-1)^4$

**(iii)** $(x-1)^3$

**(iv)** $(x-1)^2$