12.1. Stammfunktionen

Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen bis auf eine Konstante:

(a) $\sin(x)^2$

(b) $\sin(x)e^x$

(c) $\cos(x)e^{\sin(x)}$

(d) $\sinh(x)\cos(x)$

Hinweis: Proposition 6.1.4 ist hilfreich. Teilweise lassen sich Stammfunktionen nur durch wiederholtes Anwenden von Prop. 6.1.4.(2) bestimmen.

12.2. Stammfunktionen per Rekursion berechnen

Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für jedes $n \in \mathbb{N}$, um die Stammfunktionen zu folgenden Funktionen bestimmen zu können:

$$\cos(x)^n, x^n e^x, \log(x)^n$$

Berechnen Sie dann alle Stammfunktionen für $1 \leq n \leq 6$.

Hinweis: Prop. 6.1.4.(2) kann hilfreich sein aufgrund der zyklischen Ableitungen von $\sin(x), \cos(x)$.

12.3. Integrale berechnen per Definition

Berechnen Sie unter Verwendung der Definition 6.2.9 des Integrals die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 x^2 dx$

(b) $\int_0^1 x^3 dx$

Hinweis: Aufgabe 1.3 in Serie 1 kann hilfreich sein. Wählen Sie die Approximation durch Treppenfunktionen möglichst einfach.

12.4. Partialbruchzerlegung

Ziel dieser Aufgabe ist es, rationale Funktionen in einfachere Summanden zu zerlegen. Dies wird im Zusammenhang mit Integration ein wichtiges Hilfsmittel sein.

(a) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Machen Sie beide Summanden gleichnamig. Sie können aus der gewünschten Gleichheit **zwei** lineare Gleichungen in A, B herauslesen.

(b) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + Cx + D,$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest um den Grad des Zählers auf 1 zu reduzieren.

(d) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},$$

wobei $A, B, C \in \mathbb{R}$. Vergewissern Sie sich, alle drei Summanden notwendig in der Zerlegung sind (d.h. $A, B, C \neq 0$).

Hinweis: Sie müssen nur eine geeignete Formulierung geben, diese aber nicht beweisen.

(e) Benutzen Sie Partialbruchzerlegungen, um die Stammfunktionen der folgenden Funktionen zu bestimmen:

- $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$

12.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche Substitution, falls überhaupt notwendig, ist im folgenden Integral günstig?

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}\,dx$$

(i) Substitution mit $t = \tan(x)$ und folglich mit $\sin(x) = t \cdot \cos(x)$ und $dt = \frac{1}{\cos^2(x)}dx$.

(ii) Substitution mit $t = \sin(x)$ und folglich mit $dt = \cos(x)\,dx$.

(iii) Substitution mit $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ und folglich mit $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

(iv) Keine Substitution ist notwendig, denn die Gleichung $(\sin^3)'(x) = \cos^2(x)$ und die Formel $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ führen direkt zur Lösung.

(b) Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(i) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = -\cos(\phi)\cos(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi$.

(ii) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = \sin(\phi)\sin(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi$.

(iii) $\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx$.

(iv) $\int 2x^2e^{x^2}\,dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,dx$.

(v) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

(c) Wir rechnen

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)^4 = \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx \\ = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x) \end{aligned}$$

und erhalten durch Einsetzen

$$1 = f(0) = g(0) = 0.$$

Wo liegt der Fehler?

(i) Man darf nicht einsetzen.

(ii) Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

(iii) Die Integrationskonstante fehlt.

(iv) Es ist trotzdem richtig, weil man Konstanten vernachlässigen darf.