13.1. Integrale I

Berechnen Sie folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3 - x}dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}dx$,

(e) $\displaystyle\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}dx$.

13.2. Integrale II

Man berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x+5}dx$,

(b) $\displaystyle\int x^3 \arctan x \, dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$,

(d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+16}\, dx$.

Hinweis: Bei der letzten Teilaufgabe ist eine Substitution mittels $\sinh(x), \cosh(x)$ nützlich.

13.3. Tangenssubstitution

Ziel dieser Aufgabe ist die Einführung einer Substitution, welche eine Vielzahl an Integralen trigonometrischer Funktionen löst. Es sei hier stets $x \in]-\pi, \pi[$ und wir schreiben:

$$t = t(x) := \tan(\frac{x}{2})$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten unter Verwendung der Additionstheoreme:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$t'(x) = \frac{1+t(x)^2}{2}$$

Beachten Sie, dass dies auch zeigt, dass $t(x)$ eine bijektive, streng monotone Funktion zwischen $]-\pi, \pi[$ und $\mathbb{R}$.

(c) Nutzen Sie die Substitution $t = \tan(x/2)$ um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

13.4. Ableiten von Parameterintegralen

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \int_0^{\sin(t)} e^{-x^2} dx$$

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung sowie die Kettenregel.

13.5. Konvergenz von Reihen via Integrale

Ziel dieser Aufgabe ist es, das Konvergenzverhalten gewisser Reihen durch Integrale zu bestimmen. Für diese Aufgabe sei:

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R},$$

eine monoton fallende stetige Funktion, sodass für alle $x \in [1, +\infty[$ gilt:

$$f(x) \geq 0$$

(a) Wir definieren zwei Treppenfunktionen $f_1, f_2 : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ wie folgt: Auf dem Intervall $[n, n+1[$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_1(x) = f(n+1), \quad f_2(x) = f(n), \quad \forall x \in [n, n+1[$$

Folgern Sie, dass für beliebige $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_1^b f_1(x)dx \leq \int_1^b f(x)dx \leq \int_1^b f_2(x)dx$$

(b) Sei nun $b \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale explizit:

$$\int_1^b f_1(x)dx, \int_1^b f_2(x)dx$$

(c) Folgern Sie mittels den Resultaten aus der Vorlesung, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

genau dann konvergiert, wenn die folgende Reihe (absolut) konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

Hinweis: Wir erinnern uns, dass:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R f(x)dx,$$

das heisst, dass die Konvergenz des uneigentlichen Integrals bedeutet, dass der Grenzwert oben existiert in $\mathbb{R}$.

(d) Bestimmen Sie alle Exponenten $s \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)^s}$$

13.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = 1 + \sin(x)^2$

(iv) Keine der obigen.

(b) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)^2}dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = 1 + \cos(x)^2$

(iv) Keine der obigen.

(c) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^7} dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = \sin(x)^7$

(iv) Keine der obigen.