Dies ist eine Sammlung an Aufgaben, welche im Laufe des Semesters nicht verwendet wurden. Daher ist der Schwierigkeitsgrad auch durchgehend eher höher als in den regulären Aufgaben des vergangenen Semesters. Können Sie also eine Aufgabe nicht lösen, so soll dies kein Indikator sein, dass Sie das Material nicht verstanden haben, viel eher sollten diese Aufgaben als Ergänzung und Herausforderungen angesehen werden.

Aufgaben mit $\star$ sind besonders schwierig oder erfordern ein präziseres Verständnis der Konzepte als üblich.

1. Vollständigkeit (Serie 3)

(a) Benutzen Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ um zu zeigen, dass für jede von oben beschränkte, nicht-leere Menge $A \subset \mathbb{R}$ ein Supremum $s \in \mathbb{R}$ existiert. Was ist die analoge Aussage für Infima?

(b) Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge $I_1, I_2, I_3, \dots$ kompakter Intervalle, d.h. $I_k = [a_k, b_k]$ mit $a_k \leq b_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

1.) $I_{k+1} \subset I_k$ für alle natürlichen Zahlen k.

2.) $|I_k| := b_k - a_k$ wird beliebig klein, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl k mit $|I_k| < \varepsilon$.

Nutzen Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, um folgende Aussage zu zeigen:

$$\exists! x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} : \quad x \in I_k$$

Hinweis: Die Existenz von Suprema und Infima kann hilfreich sein, doch auch ein direkter Beweis mit der Definition aus der Vorlesung ist möglich.

2. Kreise und Gerade in der komplexen Ebene $\star$ (Serie 3)

Wir erinnern uns, dass ein *Kreis* in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch eine Gleichung der Form:

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2,$$

wobei alle (x, y), welche diese Identität erfüllen, auf dem Kreis mit Mittelpunkt (m_x, m_y) mit Radius r liegen. Eine *Gerade* ist hingegen gegeben durch:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$

wobei alle (x, y), welche die Identität erfüllen, auf einer Gerade liegen mit Steigungsvektor $(-b, a)$ und c die Entfernung zum Ursprung parametrisiert. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine einheitliche Beschreibung von Geraden und Kreisen in der komplexen Ebene zu erhalten.

(a) Nutzen Sie die Zerlegung von komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil, um zu beweisen, dass die folgenden Gleichungen Kreise bzw. Geraden in der Ebene darstellen:

(i.) $|z|^2 - 1 = 0$

(ii.) $|z|^2 - iz + i\overline{z} = 0$

(iii.) $|z|^2 - iz + i\overline{z} - 2 = 0$

(iv.) $-iz + i\overline{z} + 1 = 0$

Skizzieren Sie die Mengen.

(b) Beweisen Sie durch Umformen der Identität und unter der Verwendung des Real- und Imaginärteils von z, dass die folgende Identität:

$$a|z|^2 + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0,$$

einen Kreis bzw. eine Gerade parametrisiert für eine beliebige komplexe Zahl b sowie reelle Zahlen a, c mit $|b|^2 - ac > 0$. Gilt auch die Umkehrung, d.h. lassen sich alle Kreise und Geraden in der Ebene durch eine solche Identität beschreiben?

(c) Verwenden Sie die Darstellung aus der vorherigen Teilaufgabe, um zu zeigen, dass die Inversionsabbildung, welche z seine Inverse z^{-1} zuordnet, Kreise und Geraden mit dem Koeffizienten $c \neq 0$ auf Kreise und Geraden abbildet. Denken Sie darüber nach, was im Falle eines Kreises bzw. einer Geraden mit $c = 0$ passiert.

3. Limes Superior (Serie 5)

Für beschränkte Folgen reeller Zahlen existiert stets mindestens ein Häufungspunkt. Ziel der Aufgabe ist es, eine Formel für diesen zu finden. Sei dazu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen:

(a) Wir definieren für jede natürliche Zahl n:

$$b_n := \sup_{k\geq n} a_k$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt ist.

(b) Folgern Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert wie folgt gegeben ist:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$

Begründen Sie, warum der Grenzwert ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Bemerkung: Dieser Häufungspunkt wird auch der *Limes Superior* der Folge genannt und kurz als $\limsup_{n\to\infty} a_n$ geschrieben.

(c) Zeigen Sie, dass dies der grösste Häufungspunkt der Folge ist.

Hinweis: Argumentieren Sie mittels Widerspruch.

(d) Bonusaufgabe: Finden und beweisen Sie eine analoge Formel für den kleinsten Häufungspunkt einer beschränkten Folge reeller Zahlen.

4. Kompaktheit (Serie 7)

Wir nennen eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt*, falls jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in K, \forall n \in \mathbb{N}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, welche gegen einen Grenzwert in K konvergiert.

(a) Beweisen Sie, dass jede kompakte Menge K wie oben beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $[0, 1[$ nicht kompakt ist, $[0, 1]$ hingegen schon.

(c) Zeigen Sie, dass wenn $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ist und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig, dann ist folgende Menge auch kompakt:

$$f(K) := \Big\{ f(x) \;\Big|\; x \in K \Big\}$$

(d) Folgern Sie hieraus die folgende Verallgemeinerung des Extremwertsatzes: Sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, dann nimmt f sein Maximum und Minimum an.
Hinweis: Wegen der vorherigen Teilaufgaben wissen Sie, dass $f(K)$ beschränkt ist. Wählen Sie nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass $f(a_n)$ gegen das Supremum bzw. das Infimum der Menge $f(K)$ konvergieren. Was können Sie über $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussagen?

5. Konvergenzverhalten auf dem komplexen Rand (Serie 8)

Als Verallgemeinerung der vorherigen Aufgabe wollen wir nun das Konvergenzverhalten für komplexe Zahlen x bestimmen, die $|x| = R$ erfüllen.

Hinweis: Aufgabe 5.5 aus Serie 5 ist essenziell hier. Man darf ohne Beweis verwenden, dass die Aussage von Aufgabe 5.5. weiterhin gilt, wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit beschränkten Partialsummen ist.

(a) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und beweisen Sie, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = R$ divergiert.

(b) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R (oder benutzen Sie die vorherige Aufgabe) und bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{C}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

(c) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R (oder benutzen Sie die vorherige Aufgabe) und bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{C}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

Hinweis: Es ist hilfreich zu bemerken, dass jede komplexe Zahl x mit $|x| = 1$ die Form $x = e^{i\varphi}$ besitzt, für ein geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie geometrische Summationsformeln für Ausdrücke der Form $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ mit $q \in \mathbb{C}$.

6. Alternative Definition der Eulerzahl e (Serie 8)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Formel zu beweisen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \exp(1)$$

(a) Nutzen Sie den Binomischen Lehrsatz, um den folgenden Ausdruck auszumultiplizieren:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(b) In dem Ausdruck oben erscheinen Summanden der Form:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k},$$

für $k \leq n$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

(c) Beweisen Sie, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

(d) Betrachten Sie nun den folgenden Ausdruck:

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right|$$

Verwenden Sie die vorherigen Teilaufgaben und die Dreiecksungleichung, um zu beweisen, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$ und n gross genug gilt:

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| \leq \varepsilon$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $\sum_{k=N}^{\infty} 1/k!$ beliebig klein wird, wenn N gross genug ist. Sie sollten alle vorherigen Teilaufgaben anwenden können in den Abschätzungen.

(e) Folgern Sie, dass:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) =: e$$

7. Zwischenwertsatz für Ableitungen $\star$ (Serie 10)

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Version des Zwischenwertsatzes für Ableitungen zu beweisen.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist, aber f' unstetig in 0 ist.

(b) Es sei nun $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und stetig und wir nehmen an, dass die Grenzwerte:

$$f'(a_+) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad f'(b_-) = \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b},$$

existieren. Zeigen Sie, dass wenn $f'(a_+) > 0 > f'(b_-)$, dann erreicht f ein globales Maximum auf $[a,b]$ im Inneren des Intervalls, d.h. an einer Stelle $c \in]a,b[$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $f'(a_+) > 0$ impliziert, dass für $x > a$ nahe genug auch gilt:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$

Daher gilt für x nahe a auch $f(x) > f(a)$. Begründen Sie dies genau und folgern Sie eine ähnliche Ungleichung für $f'(b_-)$.

(c) Es sei nun $f'(a_+) > \gamma > f'(b_-)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Begründen Sie mittels der Funktion $g(x) = f(x) - \gamma x$ und den Überlegungen aus der vorherigen Aufgabe, dass ein $c \in]a, b[$ existiert, sodass:

$$g'(c) = f'(c) - \gamma = 0$$

(d) Folgern Sie mittels der vorherigen Teilaufgabe, dass wenn $f'(a_+) > f'(b_-)$, dann nimmt f' jeden Wert in $]f'(b_-), f'(a_+)[$ an.

(e) Nehmen Sie nun an, dass $f'(a_+) < f'(b_-)$. Wie können Sie in diesem Fall aus den vorherigen Teilaufgaben folgern, dass f' jeden Wert in $]f'(a_+), f'(b_-)[$ annimmt?

Hinweis: Wie müssen Sie f verändern, damit die vorhergehende Diskussion sich anwenden lässt?

8. Grenzwerte und Taylorpolynome (Ergänzung zu Serie 11)

Taylorpolynome stellen ein wichtiges Hilfsmittel bei der Bestimmung von einigen Grenzwerten dar:

(a) Für die ganze Aufgabe seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen in $C^\infty(I)$ und es sei $0 \in I$, I ein offenes Intervall. Man nehme an, dass $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0) = 0$ für alle $0 \leq j \leq k-1$ und $f^{(k)}(0), g^{(k)}(0) \neq 0$. Beweisen Sie:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(k)}(0)}{g^{(k)}(0)}$$

Möglicherweise möchten Sie sich auf den Fall $k = 1$ beschränken, um die Berechnungen übersichtlich zu halten.

Hinweis: Benutzen Sie die Taylorpolynome der Ordnung k von f, g und verwenden Sie die Restgliedformel in Theorem 5.7.3. Zudem gilt die Formel auch für $f^{(k)}(0) = 0$, dies wird aber einfachheitshalber nicht betrachtet, damit keine Fallunterscheidung vorkommt.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x \sin(x)^3}$
- $\lim_{x \to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}}$

Hinweis: Für den letzten Grenzwert ist eine geschickte Umformung nötig. Warum ist diese erlaubt? Verwenden Sie Taylorpolynome wie in Example 5.7.10.

9. Alternative Version des Mittelwertsatzes $\star$

Wir formulieren und beweisen eine stärkere Version des Mittelwertsatzes:

(a) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in $]a, b[$ differenzierbar sind. Wir nehmen folgendes an:

$$g(a) \neq g(b)$$

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$ ist:

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$h(a) = h(b)$$

(c) Nutzen Sie den Mittelwertsatz/Satz von Rolle, um zu zeigen, dass ein $c \in]a, b[$ existiert, sodass:

$$h'(c) = 0.$$

(d) Verwenden Sie diese Einsicht und die Definition von $h(x)$, um zu zeigen, dass wenn $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(e) Es seien nun $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktionen mit $x_0 \in I$. Ferner sei $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \neq x_0 \in I$ ein c_x zwischen x und x_0 existiert, sodass:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Hinweis: Verwenden Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz hierzu.

(f) Wir bleiben bei der Notation aus der vorherigen Teilaufgabe. Folgern Sie nun, dass:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

vorausgesetzt der Grenzwert auf der rechten Seite der Gleichung existiert.

Hinweis: Dies ist die sogenannte *Regel von L'Hôpital.*

10. Mittelwertsatz für Integrale (Serie 13)

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Beweisen Sie, dass ein $c \in [a, b]$ existiert, sodass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

11. Parameterabhängige Integrale (von F.Nestaas)

Es sei:

$$\int_0^{x^2+x^3} f(t)dt = x, \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

Bestimmen Sie $f(2)$.

Hinweis: Es sei F eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$. Schreiben Sie das Integral um mittels F und dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Wenn Sie auf beiden Seiten nach x ableiten und $F' = f$ verwenden, sollten Sie der Lösung nahe kommen.

12. Ableitungen, Integrale und Grenzwerte

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Ableitungen: Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen explizit.

a) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) := x^{-x}$

b) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \cos(x^{-x})$

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$

d) $f :] -1, 1[\to \mathbb{R}, f(x) := \frac{\arctan(x)}{1-x^2}$

(b) Integrale: Lösen Sie die folgenden Integrale explizit.

a) $\int_1^2 \log(x)dx$

b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan(x))dx$

d) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$

e) $\int_1^{e^\pi} \sin(\log(x))dx$

f) $\int_0^1 \log(1 + x^2)dx$

g) $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx$

h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \log(\sin(x))dx$

(c) Grenzwerte: Bestimmen Sie die Grenzwerte unter Verwendung aller Techniken aus der Vorlesung.

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x}$$

b)
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)+\sin(3x)}{\cos(2x)}$$

c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{2^x-1}$$

d)
$$\lim_{x\to 0}(1+2\sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}}$$

e)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x}$$

f)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

g)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Hinweis: Zumal diese Aufgaben mittlerweile Routine sind, werden hierzu nur teilweise explizite Lösungen veröffentlicht. Sie können Ihre Lösungen auch auf WolframAlpha prüfen und bei Fragen den Organisator kontaktieren.

Frohe Festtage!