1.1. Definitionsbereich

Beachten Sie, dass log nur definiert ist für positive Zahlen. Daher muss gelten:

$$\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2-1} > 0$$

Da die Wurzel stets positiv ist, falls Sie wohldefiniert ist, folgt die Bedingung:

$$x^2 - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 1,$$

was $x > 1$ oder $x < -1$ führt. Ferner ist $\sqrt{25-x^2}$ und der Logarithmus nur wohldefiniert, falls gilt:

$$25 - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 25 > x^2 \quad \Rightarrow \quad x \in (-5, 5)$$

Daher ist die Funktion definiert für alle x wie folgt:

$$x \in (-5, -1) \cup (1, 5)$$

1.2. Mengen

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n gerade ist, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$(-1)^n n + \cos(n\pi) = n + 1 = 2k + 1\,.$$

Falls andererseits n ungerade ist, d.h. $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$(-1)^n n + \cos(n\pi) = -n - 1 = -2k\,.$$

Wir schliessen daraus

$$K_1 = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{-2k : k \in \mathbb{N}\}\,.$$

(b) Mit Aufgabe **a)** kann man K_2 umschreiben:

$$K_2 = \{\cos((2k + 1)\pi) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos((-2k)\pi) : k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Daher erhält man sofort

$$K_2 = \{-1\} \cup \{1\} = \{-1, 1\}.$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n gerade ist, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{-2}{n\pi} = \frac{-1}{k\pi}\,.$$

Falls n ungerade und in der Form $n = 4k+1$ mit $k \geq 0$ ist, dann bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} &= \frac{4}{\pi^2}\frac{\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(4k+1)^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos((4k+1)\pi)}{4k+1} \\ &= \frac{2}{(4k+1)\pi}\left(\frac{2}{(4k+1)\pi} + 1\right)\,.\end{aligned}$$

Falls schliesslich n ungerade und in der Form $n = 4k+3$ mit $k \geq 0$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} &= \frac{4}{\pi^2}\frac{\sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)}{(4k+3)^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos((4k+3)\pi)}{4k+3} \\ &= \frac{2}{(4k+3)\pi}\left(\frac{-2}{(4k+3)\pi} + 1\right)\,.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$G := \left\{\frac{-1}{k\pi} : k \geq 1\right\}\,,$$

$$V_1 := \left\{\frac{2}{(4k+1)\pi}\left(\frac{2}{(4k+1)\pi} + 1\right) : k \geq 0\right\}$$

und

$$V_2 := \left\{\frac{2}{(4k+3)\pi}\left(\frac{-2}{(4k+3)\pi} + 1\right) : k \geq 0\right\}.$$

Dann gilt

$$K_3 = G \cup V_1 \cup V_2\,.$$

1.3. Bijektivität

Wir zeigen zuerst, dass f injektiv ist: Es seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = f(x_1)$. Dann folgt:

$$\frac{x_0}{1+|x_0|} = \frac{x_1}{1+|x_1|},$$

was wiederum impliziert, dass x_0, x_1 dasselbe Vorzeichen haben müssen. Daher können wir annehmen, dass beide positiv sind, der andere Fall folgt aus der Beobachtung $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt also:

$$\frac{x_0}{1+x_0} = \frac{x_1}{1+x_1} \quad \Rightarrow \quad x_0(1+x_1) = x_1(1+x_0) \quad \Rightarrow \quad x_0 = x_1$$

Also ist f injektiv.

Sei nun $y \in (-1,1)$ gegeben. Wir beschränken uns wiederum auf $y > 0$. da $f(0) = 0$ und da f ungerade ist. Wir müssen für die Surjektivität ein $x > 0$ finden, sodass:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x} = y$$

Wir sehen:

$$\begin{aligned} f(x) = y \Leftrightarrow \quad & x = y(1+x) = y + xy \\ \Leftrightarrow \quad & x(1-y) = y \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

Da $y < 1$ ist somit die Surjektivität bewiesen.

Alternativ kann man die Inverse $f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ bestimmen (die Berechnung ist analog zum Beweis der Surjektivität):

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Dann folgt $\forall y \in (-1,1)$:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= f\left(\frac{y}{1-|y|}\right) \\ &= \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1+\frac{|y|}{1-|y|}} \\ &= \frac{y}{1-|y|+|y|} \\ &= y. \end{aligned}$$

Volllkommen analog lässt sich auch zeigen, dass:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daher folgt, dass f eine Inverse besitzt und somit bijektiv ist.

1.4. Funktionen

(a) Sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, existiert $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $f(x) = y$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x) = g(y) = z$ und da $z \in Z$ beliebig war, ist $g \circ f$ surjektiv.

(b) Seien $x_1 \neq x_2 \in X$. Da f injektiv ist, folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da g ebenfalls injektiv ist, folgt $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Insbesondere gilt $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2$ in X und somit ist $g \circ f$ injektiv.

(c) Sei $z \in Z$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $(g \circ f)(x) = z$. Insbesondere gilt $g(f(x)) = z$ und folglich ist $f(x) \in Y$ ein Urbild von z unter g. Da z beliebig war, ist g surjektiv.

(d) Wir beweisen die Behauptung indirekt und zeigen: „Wenn f *nicht* injektiv ist, dann ist auch $g \circ f$ *nicht* injektiv." Dies ist formal äquivalent zu der Aussage aus der Aufgabe. Wenn f nicht injektiv ist, dann gibt es $x_1 \neq x_2$ sodass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$. Also ist $(g \circ f)$ ebenfalls nicht injektiv.

(e) Betrachten Sie folgendes Beispiel: $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$ und $Z = Y$. Ferner seien g die Identitätsabbildung und $f(1) := 1$. Dadurch sind f, g definiert. Die Abbildung f ist injektiv und g sogar bijektiv. Ferner ist es klar, dass $g \circ f$ nicht surjektiv sein kann, zumal der Definitionsbereich kleiner als der Wertebereich ist.

(f) Es seien $X = Y = \{1, 2\}$ und $Z = \{1\}$, sowie f die Identitätsabbildung und g die konstante Abbildung, d.h. $g(1) = g(2) := 1$. Die Funktion f ist bijektiv, also insbesondere injektiv, und g surjektiv. Man bemerke, dass $g \circ f$ nicht injektiv sein kann, zumal der Wertebereich kleiner als der Definitionsbereich ist.