3.1. Konvergenz

(a) Es gilt gemäss Beispiel 2.11.5 und Proposition 2.11.6, da der zweite Summand beschränkt ist (wenn auch sehr gross), dass die Folge gegen $+\infty$ konvergiert, da im Zähler ein Polynom vom Grad 3 ist, während im Nenner bloss ein Polynom vom Grad 2 enthalten ist.

(b) Wir sehen:

$$\frac{n^3+n^2}{n^2+1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+1} = \frac{2n^2}{n^2+1},$$

und dank der Beispiele aus der Vorlesung folgern wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{n^2+1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2.$$

(c) Wir sehen, dass der Zähler wie n^{97} wächst, der Nenner aber exponentiell mit 2^n. Dank Proposition 2.6.1 folgert sich daher:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{97}-n^{44}}{n^5-n^2+2^n} = 0.$$

3.2. Konvergenz von Reihen

(a) Wir wenden das Wurzelkriterium an:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n x^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2|x|}{n} = 0,$$

somit folgt gemäss Wurzelkriterium die absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Eine Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}}{\frac{2^n}{1+2^n}}\right| |x| = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^{n+1}}} = |x\ |$$

Wenn $|x| < 1$, so sehen wir, dass also die Bedingungen des Quotientenkriteriums für n gross genug erfüllt ist und somit die Reihe absolut konvergiert.

(c) Anwenden des Quotientenkriteriums liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right| |x| = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{2}{n+1} = 0$$

Die Reihe konvergiert also für alle reellen x absolut.

3.3. Stückweise stetige Funktion

(a) Auf den Intervallen $(-\infty, 0)$, $[0,1]$ und $(1,\infty)$ ist f jeweils stetig als Komposition von einfachen stetigen Funktionen.

(b) Da $\lim_{x\to 0, x<0} 3\sqrt{-x} + 1 = 1$ ist, muss der Wert von $cx + d$ an der Stelle $x = 0$ gleich 1 sein. Somit ist also $d = 1$. Weiters gilt $\lim_{x\to 1, x>1} x^{10} - 1 = 0$. Der Wert von $cx + d$ muss also in $x = 1$ gleich 0 sein. Also erhalten wir $c = -1$. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist f jeweils eine Komposition stetiger Funktionen und somit stetig. Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig genau dann wenn $d = 1$ und $c = -1$.

3.4. Fixpunkt

Wir bemerken den folgenden Zusammenhang: c ist ein Fixpunkt von f, genau dann wenn c eine Nullstelle von g wie im Hinweis ist. Dies ist klar, da:

$$f(c) = c \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow g(c) = 0$$

Also reicht es zu zeigen, dass g eine Nullstelle besitzt. Dazu sehen wir, dass $f(0) \geq 0$ und $f(1) \leq 1$. Falls entweder $f(0) = 0$ oder $f(1) = 1$, dann hätten wir bereits einen Fixpunkt gefunden. Also nehmen wir an, dass:

$$f(0) > 0, \quad f(1) < 1$$

Somit folgt:

$$g(0) > 0, \quad g(1) < 0$$

Dank des Zwischenwertsatzes (der impliziert, dass g also jeden Wert zwischen $[g(1), g(0)]$ an einer Stelle in $[0, 1]$ annimmt) können wir also folgern, dass g eine Nullstelle hat und somit f einen Fixpunkt besitzt.

3.5. Maximum von zwei Funktionen

Wir können sehen, dass:

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\Big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\Big)$$

Daher ist h als Summe und Komposition stetiger Funktionen auch selber stetig, siehe Proposition 3.2.8.