4.1. Grenzwerte

(a) Wir faktorisieren und erhalten

$$\lim_{x\to 1, x>1} \frac{x^2+19x-20}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}.$$

Da wir uns von rechts an 1 annähern, ist $(x-1)>0$. Somit erhalten wir weiter

$$\lim_{x\to 1, x>1} \frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{x+20}{1+\sqrt{x}} = \frac{21}{2}.$$

(b) Analog wie in b) erhalten wir mit Faktorisieren

$$\lim_{x\to 1, x<1} \frac{x^2+19x-20}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}.$$

Da wir uns nun von links an 1 annähern, ist $(x-1)<0$. Somit erhalten wir

$$\lim_{x\to 1, x<1} \frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{x+20}{-1+\sqrt{x}} = -\infty.$$

(c) Wir formen den Ausdruck etwas um:

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

Die Funktion auf der rechten Seite ist nun stetig in 0, daher lässt sich der Grenzwert durch Einsetzen berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

(d) Da der Sinus und der Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \sin\{\pi\cos(\sin(x))\} &= \sin\left\{\pi \lim_{x\to 0}\cos(\sin(x))\right\} \\
&= \sin\left\{\pi\cos\left(\lim_{x\to 0}\sin(x)\right)\right\} \\
&= \sin\{\pi\cos(\sin(0))\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(e) Wegen $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^8}=\infty$, ist $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^8}} = \lim_{z\to\infty} e^{-z} = 0$.

(f) Diese Folge konvergiert nicht. Um dies zu sehen, setzen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $x = 2\pi n$ ein und sehen:

$$e^{2\pi n \sin(2\pi n)} = e^0 = 1$$

Setzen wir andererseits $x = -\pi/2 + 2\pi n$ ein, so erhalten wir:

$$e^{-(\frac{-\pi}{2}+2\pi n)},$$

und dies konvergiert für n gegen ∞ gegen 0. Daher hat die Funktion zwei Häufungswerte, wenn x gegen ∞ geht und somit keinen Grenzwert in ∞.

(g) Man bemerke, dass gilt:

$$\left|\cos(e^x)\right| \leq 1,$$

daher folgt:

$$\frac{x\cos(e^x)}{1+x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos(e^x)}{1+\frac{1}{x^2}},$$

lassen wir hier nun x gegen ∞, so folgt durch die Beschränktheit des Zählers sowie der Konvergenz von $1/x, 1/x^2$ gegen 0:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\cos(e^x)}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos(e^x)}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

(h) Da der Logarithmus langsamer wächst als x gemäss Proposition 4.4.9, folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\log(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\log(x)}{x}} = 1,$$

denn $1/\sqrt{x}$ und $\log(x)/x$ konvergieren gegen 0 für x gegen ∞.

(i) Man beachte, dass wenn x gegen 1 geht, dann konvergiert $\log(x)$ gegen 0 und somit $\log(\log(x))$ gegen $-\infty$. Ersetzen wir $y = \log(x)$, so können wir sehen dank der Stetigkeit und Monotonie von log:

$$\lim_{x\to 1, x>1} \log(x)\log(\log(x)) = \lim_{y\to 0 y>0} y\log(y) = 0,$$

wobei wir in der letzten Gleichung Proposition 4.4.9 verwendet haben.

4.2. Konvergenz

(a) Nach Definition wissen wir:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ heisst, dass für alle $M > 0$ ein $R > 0$ mit

  $$x > R \Rightarrow f(x) < -M$$

  existiert.

Wegen $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ folgt auch $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{c} = 1$. Nach Definition:

- $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ heisst, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $R' > 0$ mit

  $$\left|\frac{g(x)}{c} - 1\right| < \epsilon$$

  existiert.

Wir müssen nun zeigen, dass $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = -\infty$, d.h. dass für alle $N > 0$ ein $R'' > 0$ existiert mit $(x > R'' \Rightarrow f(x)g(x) < -N)$. Wir wählen dafür $M = \left\lceil \frac{2}{c} \right\rceil N$ und $\epsilon = \frac{1}{2}$, und finden dafür R, $R' > 0$ mit

$$x > R \Rightarrow f(x) < -M = -\left\lceil \frac{2}{c} \right\rceil N, \text{ und } \quad x > R' \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{c} - 1\right| < \frac{1}{2}.$$

Die letzte Ungleichung impliziert

$$\frac{g(x)}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) > \frac{c}{2}.$$

Wir setzen nun

$$R'' := \max\{R, R'\} > 0.$$

Dann gilt für $x > R''$, dass

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &< f(x)\frac{c}{2} \\ &< -\left\lceil \frac{2}{c} \right\rceil N \frac{c}{2} \\ &< -\frac{2}{c} N \frac{c}{2} \\ &< -N. \end{aligned}$$

In der ersten Ungleichung, haben wir verwendet, dass $f(x) < 0$.

(b) (i) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{falls } x \geq 1; \\ -1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

(ii) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{falls } x \geq 1; \\ -1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

(ii) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & \text{falls } x \geq 1; \\ 1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

4.3. Gleichmässige Konvergenz

(a) Es sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann gilt für $n \geq x$:

$$f_n(x) = 0,$$

das bedeutet, für n gross genug, ist die Folge $(f_n(x))$ konstant gleich 0. Daher ist der punktweise Grenzwert der Funktionsfolge gerade $f(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Man bemerke, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f_n(n+1) - f(n+1)| = |f_n(n+1)| = 1,$$

daher gilt per Definition, dass die Funktionenfolge nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert.

(c) Es sei $R > 0$ gegeben und $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq R$. Dann gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in [-R, R]$:

$$f_n(x) = 0,$$

denn $x \leq R \leq N \leq n$. Somit gilt also, dass die Funktionen f_n konstant gleich 0 sind auf $[-R, R]$ für n gross genug. Daher konvergiert die Funktionenfolge auf $[-R, R]$ trivialerweise gleichmässig gegen $f(x) = 0$.

4.4. Trigonometrische Formeln

Für $x = 0$ sind die Summen trivalerweise gleich n bzw. 0. Da $\sin(x)$ und $\cos(x)$ perodische Funktionen mit Periode 2π sind, können wir im folgenden $x \in (0, 2\pi)$ annehmen.

Mit der Eulerschen Formel (und $\sin(0) = 0$) folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \exp(ikx) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$$

oder mit anderen Worten

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \exp(ikx)\right), \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \exp(ikx)\right).$$

Wir erhalten mit der Formel für die geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} \exp(ikx) = \sum_{k=0}^{n} \exp(ix)^k = \frac{1-\exp(ix)^{n+1}}{1-\exp(ix)}.$$

und umformen liefert

$$\begin{aligned} \frac{1-\exp(ix)^{n+1}}{1-\exp(ix)} &= \frac{e^{ix\frac{n+1}{2}}\left(e^{-ix\frac{n+1}{2}} - e^{ix\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} = e^{i\frac{n}{2}x} \cdot \frac{\sin\left(-\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)} \\ &= \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$