

5.1. Potenzreihen und Ableitungen

(a) Mit der Quotientenregel folgt für alle $|x| < 1$, da dort $1 - x \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(b) Wir erinnern uns, dass die Potenzreihe für $|x| < r$ normal konvergiert, solange $r < 1$. Daher folgt, dass wir die Potenzreihe summandenweise ableiten dürfen und finden somit:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

wobei die Summation nun bei $n = 1$ beginnt, da konstante Funktionen Ableitung 0 besitzen.

(c) Benutzen wir die gefundene Identität für die Ableitung von $1/(1-x)$, so sehen wir, dass wenn wir beide Seiten mit x multiplizieren:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

wobei die Identität für alle $|x| < 1$ gilt, da dort die geometrische Potenzreihe normal auf beschränkten Teilintervallen konvergiert.

5.2. Potenzen von Betragsfunktionen

Aus der Definition erhalten wir direkt

$$\frac{f_{\alpha}(h) - f_{\alpha}(0)}{h} = \frac{|h|^{\alpha+1} - 0}{h} = |h|^{\alpha} \frac{|h|}{h},$$

d.h.

$$\frac{f_{\alpha}(h) - f_{\alpha}(0)}{h} = |h|^{\alpha} \operatorname{sign} h.$$

Deshalb existiert der Limes für h gegen Null genau dann, wenn $\alpha > 0$ ist. In diesem Fall bekommen wir

$$f'_{\alpha}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{\alpha} \operatorname{sign} h = 0.$$

5.3. Extremalstellen

(a) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x + 4)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2, -\frac{4}{3}\right\}.$$

Die einzigen Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $-2, 2$ und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11, \\ f\left(-\frac{4}{3}\right) &= \frac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) &= 5. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

(b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - 2x(x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-x^2 - 2x + 1 = 0$$

ist, also für

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Der Wert $-1 - \sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f , der Wert $-1 + \sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also $\{-1, -1 + \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1 + \sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{2 - 2\sqrt{2} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2} + 1)}{8} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} = 1.207 \dots, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{6}{5} = 1.2. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -1 + \sqrt{2}$, der kleinste der bei $x = -1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -1 + \sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x = -1$.

(c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f :

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1) \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $x = -1$ und $x = 2$ sowie die kritischen Punkte $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\frac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\dots, \\ f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\dots, \\ f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\dots, \\ f(2) &= \frac{1}{e^2} = 0.135\dots \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

5.4. Abschätzungen aus Ableitungen

(a) Wir definieren $h(x) := f(x) - g(x)$ und bemerken, dass $h(a) \geq 0$ sowie:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0, \quad \forall x \in]a, b[$$

Das Monotonie-Kriterium zeigt nun also, dass h monoton wachsend ist, also gilt für alle $x \in [a, b]$:

$$f(x) - g(x) = h(x) \geq h(a) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

Geht man vor wie zuvor, so finden wir unter den stärkeren Annahmen an die Ableitungen:

$$h'(x) > 0, \quad \forall x \in]a, b[$$

Daher gilt gemäss dem Kriterium aus der Vorlesung, dass h streng monoton wachsend ist und daher sogar für alle $x \in]a, b]$:

$$f(x) - g(x) = h(x) > h(a) \geq 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$$

(b) Wir sehen:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}, \log'(x) = \frac{1}{x}, (x - 1)' = 1$$

Ist nun $x > 1$ ein, so sehen wir einerseits:

$$1 - \frac{1}{1} = 0 = \log(1) = 1 - 1,$$

sowie andererseits:

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < 1,$$

also haben wir die Ungleichungen für die Ableitungen aus der vorherigen Teilaufgabe. Somit folgt die gewünschte Kette von Abschätzungen.