6.1. Potenzreihen

(a) Aus der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

für $|x| < 1$ folgt:

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k \quad \text{für } |x| < 2$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k \quad \text{für } |x| < 3$$

(b) Es gilt für alle $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6} &= \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{10(x-3)} \\
&= \frac{1}{6}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{30}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} - \frac{1}{30}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{30}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{30}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6} + \frac{(-1)^k}{15\cdot 2^{k+1}} - \frac{1}{10}\frac{1}{3^{k+1}}\right)x^k.
\end{aligned}$$

(c) Man kann die gesuchten Anfangsglieder der Potenzreihe durch wiederholtes Differenzieren der Funktion f berechnen. Wir wählen hier eine andere Möglichkeit. Die gegebene Funktion ist das Produkt zweier Funktionen mit bekannter Taylor-Entwicklung, $f(x) = g(x)h(x)$, wobei

$$g(x) := \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

und

$$h(x) := \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Die Taylor-Entwicklung von f ergibt sich als Produkt dieser beiden Potenzreihen, dank der allgemeinen Leibnizformel für Ableitungen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,, \quad \text{mit} \;\; c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell\,,$$

wobei

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$$

und

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \cdot \frac{1}{\ell!} & \text{falls } \ell \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir $c_0 = 0$ und

$$c_1 = a_0 b_1 = \frac{1}{2}\,,$$

$$c_2 = a_1 b_1 = -\frac{1}{4}\,,$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_2 b_1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}\,,$$

Der Anfang des Taylorpolynoms der Funktion f lautet also

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} + R_4(f,0)(x)\,.$$

6.2. Fehlerabschätzung

Aus der Vorlesung ist bekannt

$$\sin x = T_{2n+1} \sin(x)(x;0) + R_{2n+1}(x)\,,$$

wobei

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

mit $\xi \in (0,x)$ ist.

Für $x = 1$ gilt somit

$$R_{2n+1}(1) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$

mit $\xi \in (0,1)$. Wir schätzen das Restglied mit

$$|R_{2n+1}(1)| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$$

ab. Weil wir einen Fehler kleiner als $(100!)^{-1}$ wollen, setzen wir die Bedingung

$$\frac{1}{(2n+2)!} < (100!)^{-1}$$

durch. Das ist äquivalent zu $2n+1 > 99$. Deshalb wird die Lösung der Aufgabe durch $2n+1 = 101$ gegeben.

Tatsächlich reicht schon $2n+1 = 99$. Dies kann man wie folgt sehen: Die Taylorreihe von $\sin x$ besteht nur aus Termen mit ungeraden Potenzen von x. Somit gilt

$$T_{2n+1} \sin(x)(x;0) = T_{2n+2} \sin(x)(x;0),$$

also

$$R_{2n+1}(x) = R_{2n+2}(x).$$

Letzteres lässt sich schärfer abschätzen mit der Formel vom Restglied:

$$|R_{2n+2}(1)| = \left|\frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Für $2n+1 = 99$ gilt also schon

$$|R_{2n+1}(1)| = |R_{2n+2}(1)| < (100!)^{-1}.$$

6.3. Grenzwerte

(a) Durch Erweitern sehen wir:

$$\frac{\sin(x)^3}{\sqrt{1+x^3}-1} = \frac{\sin(x)^3(\sqrt{1+x^3}+1)}{x^3}$$

Nun bemerken wir, dass:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+x^3}+1 = 2,$$

daher reicht es, den folgenden Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)^3}{x^3}$$

Dank Taylorpolynomen und der Restgliedformel wissen wir:

$$\sin(x)^3 = x^3 + x^3 r(x),$$

wobei $r(x) \to 0$, wenn $x \to 0$. Somit also:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)^3}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + x^3 r(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} 1 + r(x) = 1$$

Somit finden wir insgesamt:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)^3}{\sqrt{1+x^3}-1} = 2$$

(b) Man bemerke, dass $e^{1/x}$ gegen $e^0 = 1$ konvergiert, wenn $x \to +\infty$. Somit folgt sofort, da x gegen $+\infty$ geht:

$$\lim_{x\to\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

(c) Ersetzen wir x durch $1/y$, so sehen wir:

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}$$

Gemäss der Potenzreihenentwicklung für e^y wissen wir, dass für $y \geq 0$ gilt:

$$e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} \geq \frac{y^2}{2}$$

Somit also:

$$\frac{e^y}{y} \geq \frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2}$$

Daraus schliessen wir, da:

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{2} = +\infty,$$

ebenso gelten muss:

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty,$$

aufgrund der Monotonie von Grenzwerten.

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{e^x - e\cos(x-1)}$ Man beachte, dass gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{e^x - e\cos(x-1)} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{e(e^y - \cos(y))},$$

wenn man $1+x$ durch y ersetzt. Gemäss Taylorpolynomen wissen wir:

$$\log(1+y) = y + yr_1(y),$$

wobei gemäss der Restgliedformel gilt $r_1(y) \to 0$ für $y \to 0$. Zudem finden wir, dass:

$$e^0 - \cos(0) = 0, e^0 + \sin(0) = 1,$$

und somit haben wir gemäss der Taylorformel:

$$e^y - \cos(y) = y + yr_2(y),$$

und auch hier gilt $r_2(y) \to 0$, wenn $y \to 0$ wegen der Restgliedformel. Daher sehen wir:

$$\frac{\log(1+y)}{e(e^y - \cos(y))} = \frac{y + yr_1(y)}{e(y + yr_2(y))} = \frac{1 + r_1(y)}{e(1 + r_2(y))} \to \frac{1}{e},$$

wenn $y \to 0$. Daher können wir nun folgern:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(x)}{e^x - e\cos(x-1)} = \frac{1}{e}$$

(e) Es gilt:

$$x^x = e^{x\log(x)},$$

da die Exponentialfunktion stetig ist, reicht es also folgenden Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{x \to 0} x\log(x)$$

Hierzu bemerken wir, dass für $x < 1$ gilt:

$$\log(x) = 2(\log(x) - \log(\sqrt{x}) = \frac{2}{c}(x - \sqrt{x}),$$

für ein $c \in]x, \sqrt{x}[$ gemäss Mittelwertsatz. Somit sehen wir, da $1/x$ fallend ist:

$$0 > \log(x) > \frac{2}{x}(x - \sqrt{x}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Dies impliziert:

$$0 > x\log(x) > 2x - 2\sqrt{x}$$

Da nun gilt, dass:

$$\lim_{x \to 0} 2x - 2\sqrt{x} = 0,$$

so folgt auch, wegen der Einschliessung oben:

$$\lim_{x \to 0} x\log(x) = 0.$$

Daher folgt:

$$\lim_{x \to 0} x^x = e^0 = 1$$

(f) Man bemerke, dass $\log(x)$ gegen $-\infty$ konvergiert, wenn $x \to 0$. Somit ist sofort klar, dass:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{x} = -\infty,$$

da auch $1/x$ gegen $+\infty$ geht.