1.1. Logik

(a) 1.) Bedeutung: *Für alle* $x \in \mathbb{N}$ *existiert ein* $y \in \mathbb{N}$*, sodass* $y > x$*.*
Die Aussage ist wahr, zumal $y = x + 1$ die gewünschte Ungleichung erfüllt und $x + 1 \in \mathbb{N}$.

2.) Bedeutung: *Für jedes* $x \in \mathbb{N}$ *gilt entweder die Ungleichung* $x > 10$ *oder* $x < 10$*.*
Die Aussage ist falsch, da $x = 10$ keine der beiden Ungleichungen erfüllt.

3.) Bedeutung: *Es gibt eine reelle Zahl, sodass* $x \neq p/q$ *für alle* $p, q \in \mathbb{Z}$ *mit* $q \neq 0$*.* */ Es gilt* $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$*.*
Die Aussage ist wahr, da π beispielsweise irrational ist, d.h. nicht durch einen Bruch darstellbar.

4.) Bedeutung: *Für jedes Tripel* $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *gilt, dass wenn* c *das Produkt* ab *teilt, dann teilt* c *entweder* a *oder* b*.*
Die Aussage ist falsch, betrachte $4|2 \cdot 2$, aber offensichtlicherweise teilt 4 nicht 2.

(b) 1.) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \neq 24$ **oder** $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \neq 24$

2.) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : m > n$ **oder** $\neg\Big(\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : n \geq m\Big)$

Hinweis: Es gibt auch andere, korrekte Lösungen. Im Zweifelsfall wenden Sie sich an Ihren Übungsassistenten.

1.2. Negation

(a) $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq n + 1$, d.h. es existiert eine natürliche Zahl n, welche grösser ist wie $n + 1$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : (n \neq m) \wedge (n + m \neq 0)$, d.h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $n \neq m$ und gleichzeitig $n + m \neq 0$.

(c) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z} : (n \neq m) \wedge \Big((k = 0) \vee (n + k \neq m)\Big)$, d.h. es gibt natürliche Zahlen n, m, sodass für alle ganzen Zahlen k gilt $n \neq m$ **und** entweder $k = 0$ oder $n + k \neq m$.

1.3. Induktion

(a) Verankerung: Im Fall $n = 1$ ist die Formel trivial:

$$1^2 = 1 = \frac{1}{6} 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun die folgende Summe:

$$\begin{aligned}
1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\Big(\frac{1}{6} n(2n+1) + (n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\Big(n(2n+1) + 6n + 6\Big) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)
\end{aligned}$$

Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$ bewiesen und die allgemeine Formel daher per Induktion geprüft.

(b) Verankerung: Im Fall $n = 1$ ist die Formel trivial:

$$1^3 = 1 = \Big(\frac{1}{2} 1 \cdot 2\Big)^2$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun die folgende Summe:

$$\begin{aligned}
1^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &= \Big(\frac{1}{2} n(n+1)\Big)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2\Big(n^2 + 4(n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \Big(\frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\Big)^2
\end{aligned}$$

Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$ bewiesen und die allgemeine Formel daher per Induktion geprüft.

(c) Verankerung: Im Fall $n = 0$ ist die Formel schlicht die dritte binomische Formel:

$$(1+x) = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun das folgende Produkt:

$$\begin{aligned}(1+x)\dots(1+x^{2^n})(1+x^{2^{n+1}}) &= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \cdot (1+x^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x},\end{aligned}$$

wobei wir abermals die dritte binomische Formel verwendet haben. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$ bewiesen und die allgemeine Formel daher per Induktion geprüft.

(d) Verankerung: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$$

Induktionsannahme: Die Formel gelte nun für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir die Summe, so sehen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \\ &= (n+1) \cdot (n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &= ((n+1)+1) \cdot (n+1)! - 1 \\ &= (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1,\end{aligned}$$

was die gesuchte Identität für $n+1$ ist.

1.4. Induktionsbeweis

Der Schritt von $k = 1$ zu $k + 1 = 2$ ist falsch!
Wenn man je 1 Pferd wegnimmt, ist das übriggebliebene Pferd zwar einfarbig, aber entgegen der Behauptung müssen die Farben nicht gleich sein.

1.5. Online-MC

(a) (iv)

(b) (i)

(c) (iii), die Kontraposition einer Implikation $p \Rightarrow q$ ist gegeben durch $\neg q \Rightarrow \neg p$

(d) (iii)