2.1. Abbildungen

(a) (i) Da die Definitionsmenge mehr Elemente enthält als die Wertemenge, kann es surjektive, aber keine injektiven Abbildungen geben.

(ii) Zunächst berechnet man

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\} = \{1, 3\} \cup \{0, 1\} = \{0, 1, 3\}$$

und

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n^3 \leq 100\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Da die Definitionsmenge weniger Elemente enthält als die Wertemenge, kann es injektive, aber keine surjektiven Abbildungen geben.

(iii) Injektive Abbildungen existieren. Zum Beispiel ist die Funktion

$$2\mathbb{N} := \{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\} \longrightarrow [0, 1],\; x \longmapsto \frac{2}{\pi} \arctan(x)$$

eine injektive Funktion. Es existieren aber keine surjektiven Abbildungen. Wir beweisen dies mit dem Cantor'schen Diagonaltrick. Da $2\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind ($f(x) = 2x$ definiert eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $2\mathbb{N}$), ist es äquivalent zu zeigen, dass keine surjektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $[0, 1]$ existieren.

Sei also $g : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$ eine beliebige Funktion. Schreibe $g(n)$ in Dezimalentwicklung

$$g(n) = 0, a_{1n}\, a_{2n}\, a_{3n}\, \cdots .$$

Die Ziffern a_{kl} sind Zahlen aus $\{0, 1, \cdots, 9\}$. Betrachte nun die reelle Zahl

$$x = 0, x_1\, x_2\, x_3\, \cdots \in [0, 1],$$

wobei $x_n = 4$ falls $a_{nn} = 5$ und $x_n = 5$ falls $a_{nn} \neq 5$ ist. Mit dieser Wahl für x sehen wir, dass $x \neq g(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist x nicht im Bild von g und g ist nicht surjektiv.

(b) (i) Kein Graph einer Funktion.

(ii) Graph einer bijektiven Funktion.

(iii) Graph einer weder surjektiven, noch injektiven Funktion.

(iv) Graph einer injektiven, aber nicht surjektiven Funktion.

(v) Graph einer surjektiven, aber nicht injektiven Funktion.

(vi) Graph einer nicht injektiven Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}$, deren Wertebereich aber nicht in $[c, d]$ enthalten ist.

2.2. Bild und Urbild

(a) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1,2\} : f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1,2\} : x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

(b) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1,2\} : f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1,2\} : x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

(c) Gemäss Definition gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A \cup B : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists x \in A : f(x) = y) \vee (\exists x \in B : f(x) = y) \\ &\Leftrightarrow \quad (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Daher folgt die erste Aussage. Für den zweiten Teil der Aufgabe, beachten Sie, dass für $f : \mathbb{R} \to \{0\}$ mit $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die folgenden Beobachtungen gelten:

$$A \cap B = \emptyset, \quad f(A) \cap f(B) = \{0\}$$

Zumal das Bild der leeren Menge leer ist, haben wir das gewünschte Gegenbeispiel gefunden.