3.1. Arithmetisches, Geometrisches, Harmonisches und Quadratisches Mittel

Durch Umformen sehen wir:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Somit können wir aufgrund der Positivität von a, b umformen:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$$

Nimmt man das Quadrat auf beiden Seiten, so formt sich die Ungleichung aufgrund der Nicht-Negativität zu folgendem äquivalentem Ausdruck um:

$$4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich wahr, also ist die erste und zugleich zweite Ungleichung bewiesen. Es verbleibt die folgende Ungleichung:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Nimmt man abermals das Quadrat auf beiden Seiten, so ist die Ungleichung äquivalent zu:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$

Somit haben wir auch die letzte Ungleichung bewiesen.

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $a = b$. Dies folgt aus unserer folge von äquivalenten Ungleichungen, da Gleichheit genau dann gilt, wenn $0 = (a-b)^2$.

3.2. Komplexe Zahlen

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}(3+2i)(6-5i) &= (3 \cdot 6 - 2\cdot(-5)) + (3\cdot(-5)+2\cdot 6)i \\ &= 28-3i\end{aligned}$$

(b) Man bemerke, dass aus $|z|^2 = z\overline{z}$ die Identität $|1+i|^2 = 2 = (1+i)(1-i)$ folgt. Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

(c) Analog zur vorherigen Aufgabe finden wir $|2-i|^2 = 5 = (2-i)(2+i)$, daher:

$$\begin{aligned}\frac{3+4i}{2-i} &= \frac{(3+4i)(2+i)}{(2+i)(2-i))} \\ &= \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i\end{aligned}$$

(d) Abermals ergibt sich durch $(1+i)(1-i) = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2i}{2} = i\end{aligned}$$

Daher wissen wir:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k = i^k$$

(e) Es gilt generell für komplexe Zahlen $z = a + bi$, a, b reell:

$$\overline{z} + z = (a - bi) + (a + bi) = 2a,$$

das heisst, die Summe ist das Doppelte des Realteils der Zahl. In unserem Fall gilt:

$$(1+i)^2 = 2i,$$

also ist der Realteil gerade 0 und somit finden wir:

$$\overline{(1+i)^2} + (1+i)^2 = 0$$

Eine direkte Berechnung führt zum gleichen Ergebnis.

(f) Dank der binomischen Formeln finden wir:

$$(1+i\sqrt{3})^3 = 1 + 3 \cdot i\sqrt{3} - 3 \cdot 3 - i3\sqrt{3} = -8.$$

Daher ist das Ergebnis gerade -1.

3.3. Quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$

(a) Es gilt:

$$z^2 = (a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = c + di = w$$

Betrachten wir den Real- und Imaginärteil individuell, so sehen wir:

$$c = a^2 - b^2, \quad d = 2ab$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}|w| &= \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2-b^2)^2+(2ab)^2}\\ &= \sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2}\\ &= \sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}\\ &= \sqrt{(a^2+b^2)^2} = a^2+b^2\end{aligned}$$

Alternativ folgt dies aus $|w| = \sqrt{\overline{w}w} = \sqrt{\overline{z^2}z^2} = \sqrt{(\overline{z}z)^2} = \sqrt{|z|^4} = |z|^2 = a^2+b^2$.

(c) Wir haben das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= |w|\\ a^2-b^2 &= c\end{aligned}$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, so finden wir:

$$2a^2 = |w| + c \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}(|w|+c)$$

Analog, subtrahieren wir die zweite von der ersten Gleichung, so sehen wir:

$$2b^2 = |w| - c \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2}(|w|-c)$$

(d) Es reicht zu zeigen, dass $|c| \leq |w|$. Der Grund hierfür ist, dass dann $|w| \pm c \geq 0$ und somit eine reelle Wurzel (bzw. sogar zwei) existiert. Betrachten wir nun $|w|$, so sehen wir aufgrund der Monotonie der Wurzel:

$$|w| = \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{c^2} = |c|,$$

was die gewünschte Ungleichung ist.

(e) Man beachte, dass wenn a, b wie in der Aufgabe existieren, so gilt:

$$a^2-b^2 = \frac{1}{2}(|w|+c) - \frac{1}{2}(|w|-c) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c$$

Ferner sehen wir mittels binomischer Formeln, dass:

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(|w|+c) \cdot \frac{1}{2}(|w|-c) = |w|^2 - c^2 = c^2 + d^2 - c^2 = d^2.$$

Damit sind die gewünschten Identitäten bewiesen.

(f) Aus der vorherigen Teilaufgabe folgt, dass entweder $2ab = d$ oder $2ab = -d$. Im ersten Fall haben wir eine Wurzel gefunden. Im zweiten Fall bemerken wir, dass wir problemlos $-a$ bzw. $-b$ statt a bzw. b verwenden können, da diese noch immer Gleichung (1) erfüllen. Dann gilt aber $2(-a)b = -2ab = -(-d) = d$. Somit haben wir eine Wurzel im zweiten Fall gefunden. Man beachte, dass zwei Wurzeln existieren und man beide durch Wechsel des Vorzeichens von a und b zugleich erhalten kann.

3.4. Maximum

(i.) Nein, diese Menge besitzt zwar 2 als Supremum, aber da 2 nicht in der Menge ist kein Maximum.

(ii.) Ja, 1 ist offensichtlich eine obere Schranke und ist zugleich in der Menge enthalten, da 1 rational ist, also ein Maximum.

(iii.) Nein, das Supremum ist 1, aber diese Zahl liegt nicht in der Menge und kann somit kein Maximum sein.

(iv.) Ja, 105 ist das Maximum. Man beachte, dass jede endliche Teilmenge eine Maximum besitzt.

3.5. Supremum und Infimum

Wir zeigen $\sup(-A) = -\inf A$, die zweite Gleichung folgt komplett analog. Es sei u eine untere Schranke von A. Dann gilt:

$$\forall a \in A : \quad u \leq a \Rightarrow -u \geq -a$$

Dies impliziert nun, dass $-u$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Da $\inf A$ eine untere Schranke ist, folgt somit:

$$\sup(-A) \leq -\inf A$$

Sei nun o eine obere Schranke von $-A$. Mit demselben Argument wie oben ist $-o$ eine untere Schranke von A. Daher gilt:

$$-\sup(-A) \leq \inf A \Rightarrow \sup(-A) \geq -\inf A$$

Für die letzten Ungleichung haben wir verwendet, dass die Multiplikation mit -1 die Ungleichung umdreht. Damit können wir nun schliessen:

$$\sup(-A) = -\inf A$$