4.1. Grenzwerte

(a) Wir kürzen Zähler und Nenner mit n^2 und finden:

$$\frac{n^2-n+3}{n^2+2} = \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

Nutzen wir nun Proposition 2.5.9 (3), so sehen wir aufgrund der Tatsache, dass $1/n, 1/n^2$ Nullfolgen sind:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+3}{n^2+2} &= \frac{\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

(b) Wir sehen sofort:

$$\frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5} = \frac{\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{1+\frac{5}{2^n n^2}}$$

Verwenden wir nun Proposition 2.5.9 sowie die Grenzwerte aus Proposition 2.6.1, so finden wir:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{1+\frac{5}{2^n n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{5}{2^n n^2}} \\ &= \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \frac{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

Da $1/n^2$ eine Nullfolge ist, erwarten wir als Grenzwert 1. Wir wollen also nun den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1 &= \frac{(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1)(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1} \\ &= \frac{1-\frac{1}{n^2}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1} \\ &= \frac{-1}{n^2(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)}\end{aligned}$$

Wir betrachten, dass $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1 \geq 1$, daher finden wir:

$$\left|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right| = \frac{1}{n^2(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Dank Lemma 2.5.8 folgt nun die gewünschte Konvergenz und wir haben:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = 1.$$

4.2. Konvergenz

Mit der dritten binomischen Formel folgt

$$\frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1+a_n-1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}+1}.$$

Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert der Ausdruck rechts gegen $\frac{1}{2}$ und damit folgt die Behauptung.

4.3. Supremum und Konvergenz

Wir definieren die Folge quasi-induktiv durch geschickte Wahl der Folgeglieder: Es sei $a = \sup A$. Dann gilt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, $a - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für A sein kann. Daher gibt es ein a_n, sodass:

$$a - \frac{1}{n} < a_n \leq a$$

Indem wir dies für alle natürlichen Zahlen machen, finden wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir wollen nun zeigen, dass diese gegen a konvergiert. Beachte, dass $|a_n - a\ | = a - a_n$, da alle Folgeglieder in A liegen. Somit gilt also:

$$|a_n - a| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Gemäss Lemma 2.5.8 gilt also die gewünschte Konvergenz.

Alternativ lässt sich das Resultat auch mittels einer monoton wachsenden Folge beweisen.

4.4. Arithmetisches Mittel

(a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n > N(\varepsilon) \ : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definiere

$$M(\varepsilon) = \max_{1\leq k\leq N(\varepsilon)} |a_k - a|$$

Dann erhalten wir für $n > N(\varepsilon)$:

$$|s_n - a| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}(a_k - a)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}(a_k - a)\right| \leq \frac{N(\varepsilon)}{n}\cdot M(\varepsilon) + \frac{n-N_\varepsilon}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

Aus dieser Abschätzung folgt sofort

$$\limsup_{n\to\infty}|s_n - a| \leq \left(\lim_{n\to\infty}\frac{N(\varepsilon)M(\varepsilon)}{n}\right) + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-N(\varepsilon)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Insbesondere gibt es $N'(\varepsilon) > N(\varepsilon)$, sodass

$$|s_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N'(\varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die Konvergenz von s_n gegen a.

(b) Betrachte als Beispiel $a_n = (-1)^n$. Dann gilt

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Insbesondere gilt $|s_n| \leq \dfrac{1}{n}$ und folglich konvergiert s_n gegen 0.

4.5. Wurzelberechnung

(a) Es ist $a_1 = c$, also gilt die Ungleichung sicherlich für $n = 1$. Wir fahren per Induktion fort. Man nehme an, dass:

$$1 \leq a_n \leq c,$$

für ein n gilt. Dann folgern wir:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{c}\right) = 1,$$

da $1 \leq a_n \leq c$. Vollkommen analog folgt die andere Ungleichung:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(c + \frac{c}{1}\right) = c.$$

(b) Wir bemerken, dass $a_n \geq 1$ für alle n. Es reicht, die Ungleichung für alle $n \geq 2$ zu zeigen, da $a_1^2 = c^2 \geq c$ wegen $c \geq 1$. Somit können wir uns darauf konzentrieren, a_{n+1} für $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten, wobei wir die rekursive Formel verwenden:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - c &= \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2 - c \\ &= \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2a_n\frac{c}{a_n} + \frac{c^2}{a_n^2} - 4c\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 2 \cdot c + \frac{c^2}{a_n^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Somit folgt die gewünschte Ungleichung.

(c) Wir betrachten den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - c\right) \geq 0, \end{aligned}$$

wobei wir $a_n \geq 1 > 0$ sowie $a_n^2 \geq c$ für alle natürlichen Zahlen n verwendet haben.

(d) Da die Folge von unten beschränkt und monoton fallend ist, ist sie auch beschränkt und gemäss Theorem 2.8.2 daher konvergent. Der Grenzwert ist sogar das Infimum der Folgeglieder a_n mit $n \geq 1$.

Ferner, beobachte, dass gemäss Proposition 2.5.9 die rechte Seite der Gleichung $a_{n+1} = 1/2(a_n + c/a_n)$ gegen folgenden Ausdruck konvergiert:

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

Da beide Seiten der Gleichung naheliegenderweise gleich sind für alle Werte von $n \in \mathbb{N}$, finden wir:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung für a. Durch Umformen vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$2a^2 = a^2 + c \;\Rightarrow\; a^2 = c \;\Rightarrow\; a = \sqrt{c}$$

Beachten Sie, dass in der letzten Implikation $a \geq 0$ verwendet wurde, was aus der Nicht-Negativität der Folgeglieder folgt.

(e) Die Folgeglieder sind:

$$a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1.75, a_4 = 1.73214, a_5 = 1.73205081$$

Vergleicht man dies mit:

$$\sqrt{3} \sim 1.732050808...,$$

so sehen wir, dass a_5 bis zur siebten Nachkommastelle mit $\sqrt{3}$ übereinstimmt.