5.1. Häufungspunkte Explizit Bestimmen

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der folgenden Folgen reeller Zahlen:

(a) Die Teilfolgen $b_n = a_{2n} = 1$ und $c_n = a_{2n-1}$ sind konstant und konvergieren gegen 1 und -1. Damit sind dies Häufungspunkte. Da jede Teilfolge nur die Werte 1 und -1 annehmen kann, sind dies zugleich alle Häufungspunkte.

(b) Durch Kürzen finden wir:

$$a_n = \frac{n+1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Sowohl Zähler als auch der Nenner konvergieren gegen 1, damit konvergiert die gesamte Folge auch gegen 1 dank Proposition 2.5.9. Eine konvergente Folge hat aber gerade einen Häufungspunkt, denn jede Teilfolge konvergiert per Definition ebenfalls gegen den gleichen Grenzwert. Daher ist 1 der einzige Häufungspunkt, da jede konvergente Teilfolge nach endlich viel Gliedern nur noch konstant 1 oder -1 sein kann (da sonst der Abstand zwischen zwei Folgeglieder immer mal wieder ≥ 2 wäre).

(c) Die Teilfolge $b_n = a_{2n-1} = 0$ ist konstant und damit konvergent mit Grenzwert 0. Daher ist 0 ein Häufungspunkt. Beachten wir, dass $c_n := a_{2n}$ unbeschränkt ist wegen:

$$c_n = \frac{2(2n)^3}{(2n)^2 - (2n) + 1},$$

genauer, der Zähler ist ein Polynom vom Grad 3, während der Nenner nur Grad 2 hat. Es sei nun (d_n) eine konvergente Teilfolge. Dann kann (d_n) nur endlich viele gemeinsame Glieder mit (c_n) haben, da jede konvergente Folge beschränkt ist. Somit muss (d_n) alle bis auf endlich viele Glieder mit (b_n) gemeinsam haben. Da (b_n) aber konvergiert mit Grenzwert 0, muss auch (d_n) eine Nullfolge sein. Somit ist 0 der einzige Häufungspunkt.

(d) Wir beweisen zuerst:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Dies folgt per Induktion. Für $n = 1$ ist die Identität offensichtlich, nehmen wir nun also an, dass die Gleichung für ein n gilt. Dann sehen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2}$$

Mit den Resultaten aus der Vorlesung folgt, dass die Folge somit gegen 1/2 konvergiert und dies daher der einzige Häufungspunkt ist, wie bereits zuvor erklärt.

5.2. Unendlich viele Häufungspunkte

Wir bemerken, dass die Folge (a_n) genau die dyadischen Zahlen in $[0,1]$ enthält, d.h. alle reellen reellen Zahlen, welche sich als Bruch wie folgt darstellen lassen:

$$x = \frac{k}{2^l},$$

für geeignete natürliche Zahlen $k \geq 0$ und $l \geq 1$ mit $k \leq 2^l - 1$. Es ist klar, dass jedes a_n eine solche dyadische Zahl ist per Definition, umgekehrt sehen wir, dass x wie wir es vorher definiert haben gerade dem folgenden Folgeglied entspricht:

$$x = \frac{k}{2^l} = a_{2^l+k}$$

Daher reduziert sich die Aufgabe darauf, zu beweisen, dass zu jedem $y \in [0,1]$ eine folge dyadischer Zahlen in $[0,1]$ existiert, welche gegen y konvergiert. Aus einer solchen Folge lässt sich problemlos eine Teilfolge von (a_n) mit denselben Eigenschaften konstruieren.

Wir definieren die Folge wie folgt: Wir definieren für $l \in \mathbb{N}$ das Folgeglied b_l als diejenige dyadische Zahl unter den Zahlen:

$$\left\{0, \frac{1}{2^l}, \dots \frac{2^l-1}{2^l}\right\},$$

welche am nächsten an y ist. Da nur endlich viele dyadische Zahlen in Frage kommen, existiert b_l, auch wenn es möglicherweise nicht eindeutig ist (falls b_l nicht eindeutig ist, so können wir zufällig eine der beiden dyadischen Zahlen wählen). Wir bemerken, dass folgende Ungleichung gelten muss:

$$|b_l - y| \leq \frac{1}{2^l}$$

Dies folgt, da wenn $b_l = \frac{k}{2^l}$ für ein $k = 0, \dots 2^l - 2$, dann muss gelten:

$$\frac{k}{2^l} - \frac{1}{2^{l+1}} \leq y \leq \frac{k}{2^l} + \frac{1}{2^{l+1}},$$

da sonst entweder $\frac{k+1}{2^l}$ oder $\frac{k-1}{2^l}$ noch näher an y liegen. Falls $k = 2^l - 1$ folgt einfach:

$$\frac{2^l - 1}{2^l} - \frac{1}{2^{l+1}} \leq y \leq 1,$$

was uns sofort zeigt:

$$|b_l - y| \leq \frac{1}{2^l}.$$

Nun haben wir eine Folge dyadischer Zahlen (b_n) konstruiert und aufgrund der obigen Abschätzung und Lemma 2.5.8 folgt sofort:

$$\lim_{l \to \infty} b_l = y$$

Dies ist das gewünschte Ergebnis und beweist, dass alle $y \in [0, 1]$ Häufungspunkte von (a_n) sind.

5.3. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) Dank Proposition 2.10.14 wissen wir, dass diese Reihe konvergiert, denn $|3| = 3 > 1$.

(b) Wir sehen, dass für $n \geq 6$ gilt:

$$\frac{1}{2}n^2 = n^2 - \frac{n}{2}n \leq n^2 - 3n + 1 \leq 5n^2$$

Die Bedingung $n \geq 6$ wurde gewählt, sodass $\frac{n}{2} \geq 3$. Somit gilt also für $n \geq 6$:

$$\frac{2}{n} = \frac{2n}{n^2} \geq \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1} \geq \frac{n+4}{5n^2} = \frac{1}{5n} + \frac{4}{5n^2}$$

Da alle Reihenglieder positiv ist, wäre gemäss Theorem 2.10.5 Konvergenz äquivalent zur Beschränktheit der Partialsummen. Es gilt aber:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{5n} + \frac{4}{5n^2} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1},$$

wobei aber gemäss Proposition 2.10.14 die Partialsummen auf der linken Seite der Ungleichung unbeschränkt sind. Daher muss die Reihe divergieren.

(c) Wir bemerken, dass:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert. Daher gilt gemäss Proposition 2.10.10, dass die Reihe konvergiert.

5.4. Quotientenkriterium

(a) Wir erinnern uns, dass für die Konvergenz der Reihe die ersten paar Glieder stets ignoriert werden können, da diese zwar Einfluss auf den Wert der Reihe haben, nicht aber auf ihr Konvergenzverhalten. Wir können daher oBdA annehmen, dass $N = 1$. Wir beweisen induktiv die folgende Ungleichung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c^{n-1}|a_1|$$

Für $n = 1$ ist die Aussage trivial, es gelte die Ungleichung also für ein n und wir wollen diese dann für $n + 1$ beweisen. Dazu merken wir:

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}a_n\right| \leq c|a_n| \leq c \cdot c^{n-1}|a_1| \leq c^{(n+1)-1}|a_n|,$$

wobei wir die Induktionsannahme verwendet haben. Daher gilt also für beliebiges n:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} c^{k-1}|a_1| = |a_1| \cdot \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} \leq |a_1| \sum_{k=1}^{\infty} c^{k-1} = \frac{|a_1|}{1-c},$$

wobei wir zuerst weitere Summanden hinzugefügt haben, welche alle positiv sind und dadurch den Ausdruck nur erhöhen können, und dann die geometrische Reihe berechnet haben. Da n aber beliebig ist, haben wir somit eine Schranke für alle Partialsummen gefunden und da $|a_n| \geq 0$ folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

(b) Wir berechnen:

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)},$$

wenn wir die Definition der Fakultät zum Kürzen verwenden. Somit gilt aber:

$$\left|\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\right| \leq \left|\frac{n+1}{2(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{2},$$

daher folgt nach der ersten Teilaufgabe, dass die Reihe absolut konvergiert und somit auch konvergiert.

5.5. Bedingte Konvergenz

(a) Dies ist offensichtlich, zumal $s_k - s_{k-1} = b_k$ gemäss der Definition der Partialsummen.

(b) Wir wissen, durch Reindexierung der Summe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k(s_k - s_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=1}^{n} a_k s_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} s_k \\ &= a_n s_n - a_1 s_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) s_k\end{aligned}$$

Verwenden wir nun $s_0 = 0$, so folgt die gesuchte Identität.

(c) Es ist (a_n) eine Nullfolge und da für eine hinreichend grosse reelle Konstante $C > 0$ auch gilt $|s_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wissen wir:

$$|s_n a_n| \leq C|a_n|$$

Da (a_n) gegen 0 konvergiert, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass:

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{C}, \quad \forall n \geq N,$$

und somit auch:

$$|s_n a_n| \leq C|a_n| \leq \frac{C\varepsilon}{C} = \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Daher ist $(s_n a_n)$ auch eine Nullfolge.

(d) Wir wollen zeigen, dass für beliebige $m < n \in \mathbb{N}$, der Abstand $|d_n - d_m|$ beliebig klein wird, wenn n, m beide gross genug sind. Dazu beobachten wir:

$$\begin{aligned}|d_n - d_m| &= \Big|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(a_k - a_{k+1})\Big| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||a_k - a_{k+1}| \\ &\leq C \cdot \sum_{k=m}^{n-1} |a_k - a_{k+1}|\end{aligned}$$

Wir bemerken nun, dass (a_n) monoton fallend ist und somit:

$$|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$$

Daher folgt:

$$|d_n - d_m| \leq C \cdot \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = C(a_m - a_n)$$

Da (a_n) eine Nullfolge und somit eine Cauchy-Folge ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass:

$$0 \leq a_k - a_l = |a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall k \leq l \geq N,$$

was nun impliziert:

$$\forall n, m \geq N, m \leq n : |d_n - d_m| \leq C(a_m - a_n) \leq C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

Da ε beliebig war, folgt die gewünschte Cauchy-Eigenschaft von (d_n).

(e) Da sowohl $(s_n a_n)$ und (d_n) konvergieren, so konvergiert gemäss unseren vorherigen Berechnungen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, da die Partialsummen dieser Reihe gerade als die Summe der beiden Folgen $(s_n a_n)$ und (d_n) geschrieben werden kann.