6.1. Wurzelkriterium

Wir nehmen an, dass $q < 1$. Dann sei $q < q_0 < 1$, es existiert aufgrund der Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, sodass:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q_0, \quad \forall n \geq N$$

Daher gilt auch:

$$|a_n| \leq q_0^n, \quad \forall n \geq N$$

Gemäss des Vergleichstests aus der Vorlesung und der absoluten Konvergenz der geometrischen Reihe zu q_0 folgt das gewünschte Resultat.

Falls $q > 1$, dann wählen wir $q > q_0 > 1$ und wegen der Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq q_0, \quad \forall n \geq N.$$

Somit gilt auch:

$$|a_n| \geq q_0^n, \quad \forall n \geq N.$$

Da $q_0 > 1$ divergiert die geometrische Reihe absolut und gemäss des Vergleichstests folgt das gewünschte Resultat.

6.2. Zwischenwertsatz

Wir definieren die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$g(x) := f\Big(x + \frac{1}{2}\Big) - f(x), \quad \forall x \in [0, 1/2]$$

Es reicht also zu zeigen, dass ein $c \in [0, 1]$ existiert mit $g(c) = f(c + 1/2) - f(c) = 0$. Dazu betrachten wir die Randwerte:

$$g(0) = f\Big(\frac{1}{2}\Big) - f(0), \quad g\Big(\frac{1}{2}\Big) = f(1) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\Big(f\Big(\frac{1}{2}\Big) - f(0)\Big) = -g(0),$$

wobei wir $f(0) = f(1)$ verwendet haben. Wenn $g(0) = 0$, dann ist nichts zu beweisen. Falls $g(0) \neq 0$, so nimmt g gemäss des Zwischenwertsatzes den Wert 0 an einer Stelle $c \in [0, 1/2]$ an, zumal g positive und negative Werte annimmt. Somit ist der Beweis abgeschlossen.

6.3. Stückweise stetige Funktionen, Teil 1

(a) Wir heben zuerst hervor, dass Stetigkeit eine *lokale Eigenschaft* ist, das heisst, ob eine Funktion stetig ist oder nicht in einem Punkt hängt lediglich von den Werten in der Nähe des Punktes ab. Dies lässt sich leicht aus Proposition 3.2.10 herauslesen. Dadurch ist klar, dass f sicher in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ stetig ist, denn wenn (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x ist, so folgt wegen $x > 0$ bzw. $x < 0$ auch, dass $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n > 0$ bzw. $a_n < 0$. Das bedeutet, dass für $n \geq N$ gilt $f(a_n) = f_1(a_n)$ bzw. $f(a_n) = f_2(a_n)$. Da aber f_1 und f_2 stetig sind, folgt somit die gewünschte Konvergenz und daher Stetigkeit in $x \neq 0$ dank Proposition 3.2.10.

Es reicht also, das Verhalten von f nahe 0 zu betrachten. Falls $f_1(0) \neq f_2(0)$, so wählen wir $a_n = -1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von f_2 folgt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(a_n) = f_2(0) \neq f_1(0) = f(0),$$

da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dies zeigt gemäss Proposition 3.2.10, dass f unstetig in 0 ist.

(b) Analog zur vorherigen Aufgabe reicht es, $x = 0$ zu begutachten. Es $\varepsilon > 0$ gegeben und dank der Stetigkeit von f_1 und f_2 wissen wir, dass $\delta_1, \delta_2 > 0$ existieren, sodass:

$$|f_1(x) - f_1(0)| < \varepsilon,$$

falls $x \geq 0$ sowie $|x| < \delta_1$ und analog:

$$|f_2(x) - f_2(0)| < \varepsilon,$$

für alle $x \leq 0$ mit $|x| < \delta_2$. Mit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ finden wir also für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$:

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon,$$

dank $f_1(0) = f_2(0)$. Daher ist f stetig in $x = 0$.

(c) Gemäss unserer vorherigen Betrachtungen, welche sich leicht auf die gegenwärtige Situation ausdehnen lassen, müssen wir nur noch prüfen:

$$0^2 + 3 = 3 = d = c \cdot 0 + d,$$

was Stetigkeit in 0 ergibt sowie:

$$c \cdot 1 + d = c + d = 4 = 1^3 - 1 + 4,$$

was Stetigkeit in 1 ergibt. Zusammen sind dies die Gleichungen:

$$d = 3, c + d = c + 3 = 4 \Rightarrow c = 1, d = 3$$

Somit ist $c = 1$, $d = 3$ die einzige Lösung.

6.4. Stückweise stetige Funktionen, Teil 2

Weil der Wert von $\sqrt{\pi} + \frac{x^{\frac{7}{9}}}{\alpha}$ an der Stelle $x = 0$ gleich $\sqrt{\pi}$ ist, muss der Limes $\lim_{x\to 0, x<0} u(x) = e^k$ gleich $\sqrt{\pi}$ sein. Man erhält daher $k = \log(\sqrt{\pi})$. Ferner gilt $\lim_{x\to 1, x<0} u(x) = \sqrt{\pi} + \frac{1}{\alpha}$ und $u(1) = \frac{3e}{t} + \sqrt{\pi}$. Deshalb muss man auch die Bedingung $\sqrt{\pi} + \frac{1}{\alpha} = \frac{3e}{t} + \sqrt{\pi}$ stellen. Das bringt

$$\frac{t}{\alpha} = 3e\,, \quad \alpha, t \neq 0\,.$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist u jeweils eine Komposition stetiger Funktionen und somit stetig. Wir schliessen, dass u auf ganz $\mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn $k = \log(\sqrt{\pi})$ und $\alpha, t \neq 0$ mit $\frac{t}{\alpha} = 3e$ gilt.

6.5. Rekursive Folgen

(a) Wir beweisen, dass die Folge monoton fallend ist. Hieraus folgt die Beschränktheit sofort, da $a_n \geq 0$ dank der Definition der Wurzel gilt und zudem $f(x) = \sqrt{1+x}$ monoton fallend ist. Wir berechnen nun a_2:

$$a_2 = \sqrt{3} \leq 2 = a_1$$

Wir argumentieren nun per Induktion, wir nehmen also an, dass $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nun:

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + a_{n-1}} = a_n,$$

wobei wir die Monotonie von f abermals verwendet haben. Somit gilt $a_n \geq a_{n+1}$ und per Induktion ist die Folge daher fallend und beschränkt.

(b) Dank Theorem 2.8.3 wissen wir, dass die Folge (a_n) konvergiert und wir nennen den Grenzwert a. Da f wie oben definiert stetig ist, wissen wir zudem:

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a,$$

woraus sich nun folgert:

$$a = \sqrt{1+a} \Rightarrow a^2 = a + 1$$

Anwenden der Mitternachtsformel ergibt:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Wir beachten, dass diese Wahl der Nullstelle der Quadratischen Gleichung dank $a \geq 0$ die korrekte ist.

(c) Wir berechnen die ersten Folgeglieder:

$$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = \frac{3}{2}, b_4 = \frac{5}{3}, b_5 = \frac{8}{5}$$

Wir sehen, dass die gewünschte Folge von Ungleichungen bis hier korrekt ist. Zudem bemerken wir, dass $b_n \geq 0$ für alle n. Dank Induktion wollen wir nun die Gleichung im allgemeinen zeigen: Wir nehmen an, dass:

$$b_1 \leq b_3 \leq \ldots \leq b_{2n-1} \leq b_{2n} \leq \ldots \leq b_4 \leq b_2,$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir sehen dann:

$$b_{2n+1} = 1 + \frac{1}{b_{2n}} \geq 1 + \frac{1}{b_{2n-2}} = b_{2n-1},$$

da die Abbildung $g(x) := 1 + \frac{1}{x}$ monoton fallend ist. Zudem folgern wir analog:

$$b_{2n+2} = 1 + \frac{1}{b_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{b_{2n-1}} = b_{2n},$$

auch dank der Monotonie von g. Zuletzt sehen wir:

$$b_{2n+1} \leq b_{2n+2} \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{1}{b_{2n}} \leq 1 + \frac{1}{b_{2n-1}} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{b_{2n}} \leq \frac{1}{b_{2n-1}} \;\Leftrightarrow b_{2n-1} \leq b_{2n},$$

wobei die letzte Ungleichung dank der Induktionsannahme korrekt ist.

(d) Wir bemerken, dass die Teilfolgen $c_n := b_{2n}$ und $d_n := b_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ monotone und beschränkte Folgen sind. Dies ist offensichtlich dank der vorherigen Teilaufgabe. Wir schreiben c bzw. d für die jeweiligen Grenzwerte. Da g stetig ist, können wir sehen:

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{d_n} = 1 + \frac{1}{d},$$

sowie vollkommen analog:

$$d = 1 + \frac{1}{c}$$

Dies impliziert:

$$d = \frac{c+1}{c} \;\Rightarrow\; c = 1 + \frac{1}{d} = \frac{2c+1}{c+1} \;\Rightarrow\; c^2 + c = 2c + 1$$

Also:

$$c^2 = c + 1$$

Vollkommen analog finden wir auch:

$$d^2 = d + 1$$

Da abermals $c, d \geq 0$ müssen nun:

$$c = d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dies impliziert nun auch, dass (b_n) konvergiert und den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

besitzt.